Ecuaciones Diferenciales Parciales

Lección 1.1: Ecuación de transporte. Curvas características.

Ramón G. Plaza

IIMAS-UNAM

Sección 1: Ecuaciones de primer orden

1. Motivación: la ecuación de transporte
2. Curvas características
3. Interpretación geométrica. Sistema equivalente

La ecuación de transporte

EDP más simple posible:

$$u_t + au_x = 0, \qquad \text{(ET)}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ (variable espacial), $t > 0$ (tiempo), $u = u(x,t)$ es una cantidad escalar, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, es constante.
(ET) tiene nombre: **ecuación de transporte**.

Problema de Cauchy
Consiste en resolver (ET) sujeta a una condición inicial de la forma

$$u(x,0) = u_0(x),$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función conocida.

La ecuación de transporte

EDP más simple posible:

$$u_t + au_x = 0, \qquad \text{(ET)}$$

donde $x \in \mathbb{R}$ (variable espacial), $t > 0$ (tiempo), $u = u(x,t)$ es una cantidad escalar, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, es constante. (ET) tiene nombre: **ecuación de transporte**.

Problema de Cauchy

Consiste en resolver (ET) sujeta a una condición inicial de la forma

$$u(x,0) = u_0(x),$$

donde $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función conocida.

Interpretación de la ec. (ET):

La cantidad u es la concentración (por unidad de longitud) de una sustancia química, en la posición $x \in \mathbb{R}$ a tiempo $t > 0$, que se vierte sobre un dominio unidimensional, por ejemplo, un río que fluye con velocidad constante a. Si la sustancia no se difunde, entonces ésta se **transporta convectivamente** con velocidad $a \in \mathbb{R}$. La condición inicial representa la distribución inicial de la sustancia a lo largo del río.

¿Cómo se resuelve el problema de Cauchy para (ET)?

Observación: el lado derecho (ET) es la derivada direccional de u en dirección de $(a,1)^\top$ en el plano (x,t):

$$u_t + au_x = \nabla_{(x,t)} u \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

El vector $(a,1)^\top \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ en el espacio-tiempo es una dirección preferencial, denominada **característica**, que está determinada por la misma ecuación.

Definición

Las rectas de la forma

$$x(t) = at + y_0, \qquad t > 0,$$

$y_0 \in \mathbb{R}$ fijo, se denominan **curvas características** asociadas a la ecuación (ET).

Observación: el lado derecho (ET) es la derivada direccional de u en dirección de $(a,1)^\top$ en el plano (x,t):

$$u_t + a u_x = \nabla_{(x,t)} u \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

El vector $(a,1)^\top \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ en el espacio-tiempo es una dirección preferencial, denominada **característica**, que está determinada por la misma ecuación.

Definición

Las rectas de la forma

$$x(t) = at + y_0, \qquad t > 0,$$

$y_0 \in \mathbb{R}$ fijo, se denominan **curvas características** asociadas a la ecuación (ET).

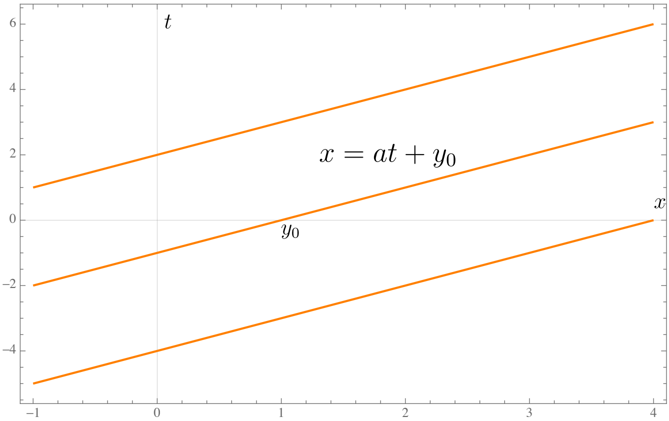

Figura: Curvas características de la ecuación (ET).

Las curvas características están dotadas de una propiedad importante: la "información" se propaga sobre ellas. Esto significa:

Proposición

Si $u = u(x,t)$ *es una solución diferenciable de la ecuación* (ET) *entonces* u *es constante sobre todas las curvas características.*

Demostración: Evaluamos la solución sobre una curva característica, $U(t) := u(at + y_0, t)$. De este modo,

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} u(at + y_0, t) = (au_x + u_t)(at + y_0, t) = 0.$$

$\square$

Consecuencias: resolver el problema de Cauchy es muy sencillo. Para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, **fijo**, existe una única curva característica

$$\{(x + a(s-t), s) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \,:\, s \geq 0\},$$

que intersecta al eje $s = 0$ en el punto $y_0 = x - at$. Como u es constante sobre la curva característica, entonces la solución es simplemente

$$u(x,t) = u(x-at,0) = u_0(x-at).$$

Por ejemplo, si $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$ entonces

$$u_t + au_x = -au_0'(x-at) + au_0'(x-at) = 0.$$

Observaciones:

- La solución tiene forma de **onda viajera**: $u(x,t) = u_0(x - at)$. Es decir, es una función que no cambia de forma y que depende únicamente de la variable de translación, $x - at$. La onda viaja con velocidad $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
- Si u_0 es de clase $C^m(\mathbb{R})$ entonces, claramente, u es de clase $C^m(\mathbb{R} \times (0,\infty))$. Es decir **la regularidad se preserva**.
- Dado que $a \neq 0$, la curva de datos iniciales $\{t = 0\}$ **no es una curva característica**
- Las curvas características **no se intersectan**
- La solución es **única**. (¿Porqué?)

Condiciones de frontera

Ahora nos planteamos la posibilidad de imponer condiciones de frontera.

Interpretación: En un punto del río, $x = 0$, se vierte el químico a una razón conocida. En este caso, conocemos la concentración u en el punto $x = 0$ para todo tiempo $t > 0$. La condición de frontera tiene la forma genérica

$$u(0,t) = g(t), \qquad t > 0,$$

donde $g = g(t)$ es una función conocida de $t > 0$.

El resultado es un **problema con valores iniciales y de frontera**:

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x > 0, \\ u(0,t) &= g(t), & t > 0. \end{aligned}$$

Suponiendo $a > 0$. Sea $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, **fijo**. Tenemos dos casos:

(a) $x > at$: La curva característica que pasa por (x,t) intersecta al eje $\{t = 0\}$ en el punto $x - at > 0$, y la solución está determinada por la condición inicial.

(b) $0 < x < at$: La curva característica intersecta primero al eje $\{x = 0\}$ en el punto $(0, t - x/a)$ (es decir, a tiempo $t - x/a > 0$). En este caso la solución está determinada por la condición de frontera.

El resultado es un **problema con valores iniciales y de frontera**:

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= 0, & x > 0,\ t > 0,\\ u(x,0) &= u_0(x), & x > 0,\\ u(0,t) &= g(t), & t > 0. \end{aligned}$$

Suponiendo $a > 0$. Sea $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, **fijo**. Tenemos dos casos:

(a) $x > at$: La curva característica que pasa por (x,t) intersecta al eje $\{t = 0\}$ en el punto $x - at > 0$, y la solución está determinada por la condición inicial.

(b) $0 < x < at$: La curva característica intersecta primero al eje $\{x = 0\}$ en el punto $(0, t - x/a)$ (es decir, a tiempo $t - x/a > 0$). En este caso la solución está determinada por la condición de frontera.

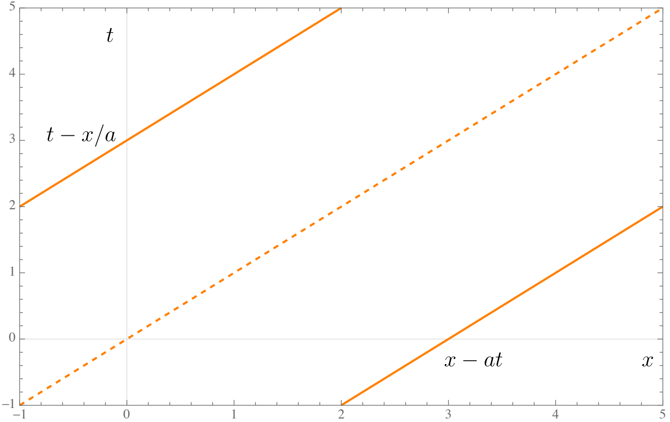

Figura: Casos (a) y (b).

La solución al problema es:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x-at), & 0 < at < x, \\ g(t-x/a), & 0 < x < at. \end{cases}$$

Observación: Se requiere una condición de compatibilidad entre los datos iniciales y de frontera,

$$u_0(0) = g(0).$$

Notamos que si se cumple esta condición entonces la solución es **continua** sobre la recta $x = at$.

Ejercicio

Encontrar las condiciones sobre u_0 y g para que la solución sea de clase $C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

La solución al problema es:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - at), & 0 < at < x, \\ g(t - x/a), & 0 < x < at. \end{cases}$$

Observación: Se requiere una condición de compatibilidad entre los datos iniciales y de frontera,

$$u_0(0) = g(0).$$

Notamos que si se cumple esta condición entonces la solución es **continua** sobre la recta $x = at$.

Ejercicio

Encontrar las condiciones sobre u_0 y g para que la solución sea de clase $C^1(\mathbb{R} \times (0,\infty))$.

Ley fenomenológica de balance

Podemos deducir la **ecuación de transporte** a partir de un principio universal de balance. Sea $V \subset \mathbb{R}^d$, con $d \in \mathbb{N}$, un dominio arbitrario, abierto y acotado, con frontera ∂V, suave y orientable de manera que podemos aplicar el **teorema de la divergencia**.

Ley de balance: se expresa en términos de cantidades extensivas (masa, momento lineal, energía,) y se postula en función del balance entre la producción de dichas cantidades en V y del flujo de las mismas a través de ∂V.

Hipótesis

Las fuerzas físicas (externas o materiales) que transportan, producen o destruyen estas cantidades son conocidas.

Sean $u_1, \ldots, u_n$, con $n \geq 1$, las densidades (por unidad de volumen) de las **variables de estado**, $u_j = u_j(x,t)$. Denotaremos al campo vectorial $(x,t) \mapsto u(x,t)$ como el vector de densidades de variables de estado,

$$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1(x,t) \\ \vdots \\ u_n(x,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Dimensión del espacio de variables de estado: $n \geq 1$. Dimensión del espacio físico: $d \geq 1$. Suponemos $u \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$, abierto, conocido como el **dominio de variables de estado** del sistema.

La cantidad total de la variable u_k, $1 \leq k \leq n$, en el volumen V a tiempo $t > 0$ es $\int_V u_k(x,t)\,dx$. De este modo, el vector,

$$U(t) = \int_V u(x,t)\,dx \;\in \mathbb{R}^n,$$

representa la cantidad total (o **masa**) de las variables de estado en V a tiempo $t > 0$.

El **flujo** de las mismas a través de la frontera ∂V está determinado por un campo $F \in \mathbb{R}^{n\times d}$, $F = F(x,t,u,\nabla u,\ldots)$, de la siguiente manera: la cantidad de la densidad u_i, $1 \leq i \leq n$ que fluye a través de un elemento de superficie dS_x sobre ∂V cuya normal exterior va en dirección $\hat{n} \in \mathbb{R}^d$ está dada por

$$-\sum_{j=1}^{d} f_i^j n_j \, dS_x$$

Se define la componente (i,j) de F, $1 \leq j \leq d$, $1 \leq i \leq n$, como f_i^j:

$$F = \left(f^1, \quad \ldots, \quad f^d\right) \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

$f^j \in \mathbb{R}^n$ con $j = 1, \ldots, d$, son las columnas de F. Así, la masa total de las variables de estado que fluye a través de la frontera de V es

$$-\int_{\partial V} F\hat{n}\, dS_x \in \mathbb{R}^n$$

Este flujo total se debe añadir a la cantidad de u que se **produce/destruye** dentro de V, ya sea por términos de **reacción** (dependientes de u) o por acción de **campos externos**. El resultado es una cuantificación de dU/dt.

Términos de balance, producción o campos externos

Adicionalmente existen interacciones del sistema con **campos externos** (por ejemplo, la fuerza de gravedad, campo eléctromagnético, potenciales químicos, etc.). Hay también términos de **producción** que dependen de u o de sus derivadas (tasas de producción dependientes de la densidad). Las densidades por unidad de volumen de estos términos se expresan mediante el campo vectorial $g = (g_1, \ldots, g_n)^\top \in \mathbb{R}^n$. En principio, $g = g(x,t,u,\ldots)$. Si se trata de campos externos entonces $g = g(x,t)$.

Si $g \equiv 0$ entonces las variables de estado se **conservan** (ejemplo, la densidad de masa en las ecuaciones de Navier-Stokes).

El **principio de balance** se expresa:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V} F\hat{n}\,dS_x + \int_V g\,dx,$$

para todo dominio arbitrario V del espacio físico.

Si las funciones u y F son **diferenciables** entonces, por el teorema de la divergencia obtenemos la siguiente ley general de balance en forma integral:

$$\int_V \big(u_t + \mathrm{div}_x F - g\big)\,dx = 0.$$

Dado que el dominio V es arbitrario y suponiendo que el integrando es continuo, por el **teorema de localización** obtenemos un **sistema de leyes diferenciales de balance**

$$u_t + \mathrm{div}_x F = g.$$

Teorema de localización

Teorema

Sea F un campo escalar o vectorial, continuo, en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Si para cualquier bola abierta B contenida en Ω se cumple que

$$\int_B F(x)\,dx = 0,$$

entonces $F = 0$ en Ω.

Demostración: Sea $x_0 \in \Omega$, arbitrario. Para cada $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$ definimos

$$I_\varepsilon = \left| F(x_0) - \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x_0)} F(x)\,dx \right|.$$

Por lo tanto

$$0 \leq I_\varepsilon \leq \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x_0)} |F(x_0) - F(x)|\, dx \leq \sup_{x \in B_\varepsilon(x_0)} |F(x_0) - F(x)|.$$

Por continuidad de F, concluimos que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} I_\varepsilon = 0$, y por lo tanto, para cada $x_0 \in \Omega$

$$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon(x_0)} F(x)\, dx.$$

Por la propiedad de F se obtiene que $F(x_0) = 0$ para cada $x_0 \in \Omega$ arbitrario. $\square$

Modelación

¿Cómo determinar F y g? La elección de F y g determinan el proceso de **modelación**.

Ejemplos:

(i) Ecuación escalar de transporte: Flujo convectivo
Sea el caso escalar, $n = 1$. Supongamos que un fluido en movimiento ocupa una región del espacio que contiene al volumen V. Sea $c = c(x,t)$ la concentración (cantidad física por unidad de masa) de la cantidad extensiva bajo consideración, que puede ser, por ejemplo, la concentración de una sustancia química en el fluido. Si $\rho = \rho(x,t)$ es la densidad del fluido entonces la densidad por unidad de volumen del químico es $u = \rho c$.

Supongamos que el campo de velocidades del fluido es conocido, dado por el campo $a = a(x,t) \in \mathbb{R}^3$. Cuando el fluido transporta el químico con dicha velocidad, el flujo asociado se denomina **convectivo**. Notamos que el volumen de fluido que cruza un elemento dS de la frontera de V en un intervalo infinitesimal de tiempo dt es $a \cdot \hat{n}\, dS\, dt$, donde $\hat{n}$ es el vector unitario normal a dS. Como $u = \rho c$ es la densidad (masa por unidad de volumen), la cantidad de masa transportada en la dirección normal $\hat{n}$ por unidad de área y por unidad de tiempo es $(a \cdot \hat{n})\rho c$. Esto implica que el flujo convectivo asociado al transporte de la sustancia por el fluido es

$$F = \rho c(x,t) a(x,t) = u(x,t) a(x,t) \in \mathbb{R}^3.$$

Sustituyendo en la ley de balance obtenemos la **ecuación de transporte**:

$$(\rho c)_t + \mathrm{div}_x\big(\rho c a\big) = g.$$

En términos de la densidad por unidad de volumen, $u = \rho c$, la ecuación de transporte toma la forma

$$u_t + \mathrm{div}_x\big(u a\big) = g.$$

Es decir, $F(x,t,u) = ua(x,t) \in \mathbb{R}^3$ es la **función de flujo**. Si el campo de velocidades es **constante** obtenemos

$$u_t + a \cdot \nabla_x u = g.$$

(ii) Sistema de leyes de conservación

Si la función de flujo es **nolineal**, depende sólo de las variables de estado, $u \in \mathbb{R}^n$, es decir, $f^j = f^j(u)$, $1 \leq j \leq d$, y $g \equiv 0$, entonces obtenemos un sistema de la forma

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} f^j(u) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0,$$

conocido como **sistema de leyes de conservación**.

Ejemplo: ecuaciones de Euler para un fluido compresible,

$$\rho_t + \sum_{j=1}^{3} (\rho v_j)_{x_j} = 0,$$

$$(\rho v_i)_t + \sum_{j=1}^{3} (\rho v_i v_j)_{x_j} + p_{x_i} = 0, \quad i = 1,2,3,$$

$$\big(\rho(e + \tfrac{1}{2}|v|^2)\big)_t + \sum_{j=1}^{3} \Big(\rho v_j (e + \tfrac{1}{2}|v|^2) + p v_j\Big)_{x_j} = 0,$$

donde $p = p(\rho, e)$ - presión termodinámica, $v \in \mathbb{R}^3$ - campo de velocidades, ρ - densidad de masa, e - densidad de energía interna. $d = 3$, $n = 5$.

Las variables de estado (conservadas) son:

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

Las funciones de flujo son:

$$F(u) = \begin{pmatrix} \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1^2 + p & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_1 v_2 & \rho v_2^2 + p & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_1 v_3 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 + p \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p) v_1 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p) v_2 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p) v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ (u_2)^2/u_1 + \hat{p} & u_2 u_3/u_1 & u_2 u_4/u_1 \\ u_2 u_3/u_1 & (u_3)^2/u_1 + \hat{p} & u_3 u_4/u_1 \\ u_2 u_4/u_1 & u_3 u_4/u_1 & (u_4)^2/u_1 + \hat{p} \\ u_2 u_5/u_1 + (u_2/u_1)\hat{p} & u_3 u_5/u_1 + (u_3/u_1)\hat{p} & u_4 u_5/u_1 + (u_4/u_1)\hat{p} \end{pmatrix},$$

con $\hat{p}(u) = p\left(u_1, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1\right) = p(\rho, e)$

(iii) Ecuaciones de reacción difusión

Caso escalar, $n = 1$, varias dimensiones espaciales $x \in \mathbb{R}^d$. Consideremos una función de flujo de la forma

$$F = -D\nabla_x u \in \mathbb{R}^d$$

con $D > 0$ constante. En este caso lo llamamos flujo de tipo **difusivo** y el parámetro D se conoce como **coeficiente de difusión o difusividad**. Si el término de producción es $g = g(u)$, es decir, es un término de **reacción o reproducción** dependiente de u obtenemos la ecuación estándar de **reacción-difusión**:

$$u_t = D\Delta u + g(u).$$

Ejemplos de términos de reacción:

- Crecimiento exponencial, $g(u) = ru$, $r > 0$ (Malthus)
- Ley logística de crecimiento, $g(u) = ru(1 - u/K)$ (monoestable, Fisher-KPP)
- Ley biestable $g(u) = ru(1 - u/K)(u/A - 1)$, con $0 < A < K$ (Nagumo)

Ecuación de transporte en $\mathbb{R}^d$

Campo **constante** de velocidades $a = (a_1, \ldots, a_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ y que la densidad volumétrica es conocida a tiempo $t = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$. El resultado es el siguiente problema de Cauchy para la **ecuación de transporte en** $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla u &= 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

La derivada direccional (en el espacio tiempo) de u en dirección $(a,1)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ es el lado izquierdo de la ecuación. Esto implica que u es constante a lo largo de rectas en esa dirección, que llamamos **curvas características**. Por ende, sea

$$\tilde{u}(s) := u(x + sa, t + s).$$

Ecuación de transporte en $\mathbb{R}^d$

Campo **constante** de velocidades $a = (a_1, \ldots, a_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ y que la densidad volumétrica es conocida a tiempo $t = 0$, $u(x,0) = u_0(x)$. El resultado es el siguiente problema de Cauchy para la **ecuación de transporte en** $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla u &= 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

La derivada direccional (en el espacio tiempo) de u en dirección $(a,1)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ es el lado izquierdo de la ecuación. Esto implica que u es constante a lo largo de rectas en esa dirección, que llamamos **curvas características**. Por ende, sea

$$\tilde{u}(s) := u(x + sa, t + s).$$

Derivando a lo largo de la recta característica obtenemos

$$\frac{d\tilde{u}}{ds} = u_t + \sum_{j=1}^{d} a_j \partial_{x_j} u = u_t + a \cdot \nabla u = 0.$$

Por lo tanto, para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, fijo, tomamos $s = -t$ para obtener la solución en forma de **onda viajera**:

$$u(x,t) = u(x-at,0) = u_0(x-at).$$

Mismos comentarios sobre: regularidad, unicidad, curva inicial de tipo no característico, etc.

Derivando a lo largo de la recta característica obtenemos

$$\frac{d\tilde{u}}{ds} = u_t + \sum_{j=1}^{d} a_j \partial_{x_j} u = u_t + a \cdot \nabla u = 0.$$

Por lo tanto, para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$, fijo, tomamos $s = -t$ para obtener la solución en forma de **onda viajera**:

$$u(x,t) = u(x - at, 0) = u_0(x - at).$$

Mismos comentarios sobre: regularidad, unicidad, curva inicial de tipo no característico, etc.

Problema no homogéneo

Si existen **campos externos**, cuya densidad es la función conocida $g = g(x,t)$, entonces obtenemos el **problema no homogéneo**:

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla u &= g, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

¿Cómo se definen en este caso las curvas características? **Igual**. En este caso la función u **no es constante** sobre ellas, pero la ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria no homogénea que se resuelve por integración directa.

Problema no homogéneo

Si existen **campos externos**, cuya densidad es la función conocida $g = g(x,t)$, entonces obtenemos el **problema no homogéneo**:

$$
\begin{aligned}
u_t + a \cdot \nabla u &= g, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0,\\
u(x,0) &= u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d.
\end{aligned}
$$

¿Cómo se definen en este caso las curvas características? **Igual**. En este caso la función u **no es constante** sobre ellas, pero la ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria no homogénea que se resuelve por integración directa.

Definimos $\tilde{u}(s) := u(x+sa, t+s)$, $\tilde{g}(s) := g(x+sa, t+s)$, de modo que derivando sobre la característica,

$$\frac{d\tilde{u}}{ds} = u_t + a \cdot \nabla u = \tilde{g}(s).$$

Ésta es una ecuación diferencial ordinaria que se puede integrar **directamente**. La solución es

$$\tilde{u}(s) = \tilde{u}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \tilde{g}(y)\, dy.$$

Para $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0,\infty)$ fijo tomamos $s_0 = -t$, $s = 0$ para obtener:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(0) = u(x,t) = u(x-at,0) + \int_{-t}^{0} \tilde{g}(y)\, dy \\ = u_0(x-at) + \int_0^t g(x+(y-t)a, y)\, dy. \end{aligned}$$

Ejercicio

Verificar, mediante el método de integración sobre curvas características, que la solución al problema mixto

$$\begin{aligned} u_t + a u_x &= f(x,t), \quad x > 0, \ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad\quad x > 0, \\ u(0,t) &= g(t), \qquad\qquad t > 0. \end{aligned}$$

es:

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(x - at) + \displaystyle\int_{t-x/a}^{t} f(a(s-t)+x, s)\, ds, & 0 < at < x, \\ g(t - x/a) + \displaystyle\int_0^t f(a(s-t)+x, s)\, ds, & 0 < x < at. \end{cases}$$

Hallar las condiciones de compatibilidad sobre f, g y u_0 para que la solución sea de clase $u \in C^1$

Coeficientes no constantes

Consideremos el siguiente **problema no homogéneo**:

$$\begin{aligned} u_t + a(x,t)\cdot\nabla u = g, \qquad & x\in\mathbb{R}^d,\, t>0,\\ u(x,0) = u_0(x), \qquad & x\in\mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

donde el campo vectorial $(x,t)\mapsto a(x,t)\in\mathbb{R}^d$ es de clase C^1. Cada componente $a_j = a_j(x,t)\in C^1(\mathbb{R}\times(0,\infty))$, $1\leq j\leq d$. $g = g(x,t)$ conocido.

Definición

Las **curvas características** se definen como las soluciones $\hat{x} = \hat{x}(s)$ a

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = a(\hat{x},s), \quad \hat{x}(0) = \xi_0, \qquad \xi_0\in\mathbb{R}^d \text{ arbitrario.}$$

Por el **teorema de Picard** es posible resolver el sistema característico **localmente**. Supongamos que (x,t) está en una vecindad de la curva inicial, $(\xi,0)$, es decir, $0 < t \ll 1$. Sea $\hat{x}(s)$ la solución al sistema característico, con $\hat{x}(0) = \xi_0$ arbitrario. Si u es solución de clase C^1 entonces definimos:

$$\tilde{u}(s) := u(\hat{x}(s), t+\eta_0), \qquad \tilde{g}(s) := g(\hat{x}(s), t+\eta_0).$$

η_0 arbitrario. Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{u}}{ds} &= (u_t + \frac{d\hat{x}}{ds} \cdot \nabla u)(\hat{x}(s), s+\eta_0) \\ &= (u_t + a \cdot \nabla u)(\hat{x}(s), s+\eta_0) = \tilde{g}(s). \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$\tilde{u}(s) = \tilde{u}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \tilde{g}(y)\,dy.$$

Seleccionando: $s = 0$, $\xi_0 = x$, $\eta_0 = -t$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) = \tilde{u}(0) &= u(\hat{x}(-t),0) + \int_{-t}^{0} \tilde{g}(y)\,dy \\ &= u_0(\hat{x}(-t)) + \int_0^t g(\hat{x}(-y), t-y)\,dy \end{aligned}$$

El problema tiene solución si es posible resolver el sistema característico.

Resolviendo:

$$\tilde{u}(s) = \tilde{u}(s_0) + \int_{s_0}^{s} \tilde{g}(y)\, dy.$$

Seleccionando: $s = 0$, $\xi_0 = x$, $\eta_0 = -t$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(x,t) = \tilde{u}(0) &= u(\hat{x}(-t),0) + \int_{-t}^{0} \tilde{g}(y)\, dy \\ &= u_0(\hat{x}(-t)) + \int_{0}^{t} g(\hat{x}(-y), t-y)\, dy \end{aligned}$$

El problema tiene solución si es posible resolver el sistema característico.

La ecuación de Burgers no viscosa

Consideremos la siguiente ecuación:

$$u_t + uu_x = 0, \qquad \text{(B)}$$

con $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ y condición inicial:

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Se conoce como **ecuación de Burgers no viscosa**.
Prototipo de una **ley de conservación escalar**, con función de flujo $f(u) = \frac{1}{2}u^2$.

Definición

Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,T))$, $T > 0$, una solución a la ecuación de Burgers (B). Las **curvas características** asociadas a dicha solución se definen como las soluciones $\hat{x} = \hat{x}(s)$ a

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = u(\hat{x}, s), \quad \hat{x}(0) = \xi_0, \qquad \xi_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

Proposición

Una solución de clase C^1 de la ecuación de Burgers es constante sobre las curvas características.

Demostración: Derivando sobre la característica obtenemos

$$\frac{d}{dt} u(\hat{t}, t) = u_t + \frac{d\hat{x}}{dt} u_x = u_t + u u_x = 0.$$

Definición

Sea $u \in C^1(\mathbb{R} \times (0,T))$, $T > 0$, una solución a la ecuación de Burgers (B). Las **curvas características** asociadas a dicha solución se definen como las soluciones $\hat{x} = \hat{x}(s)$ a

$$\frac{d\hat{x}}{ds} = u(\hat{x}, s), \quad \hat{x}(0) = \xi_0, \qquad \xi_0 \in \mathbb{R} \text{ arbitrario.}$$

Proposición

Una solución de clase C^1 de la ecuación de Burgers es constante sobre las curvas características.

Demostración: Derivando sobre la característica obtenemos

$$\frac{d}{dt} u(\hat{t}, t) = u_t + \frac{d\hat{x}}{dt} u_x = u_t + u u_x = 0.$$

$\square$

Rompimiento a tiempo finito

Consecuencia: La curvas característica son **líneas rectas**.

Sin embargo, la ecuación es **no lineal**. Esto da lugar que, dependiendo de la condición inicial u_0 (propiedades de monotonía), las rectas características se pueden **intersectar**. En este caso el concepto de solución se debe redefinir. La solución de clase C^1 deja de tener sentido a partir del tiempo de intersección, conocido como **tiempo de rompimiento**.
Si $u_0 \in C^1$ la solución de clase C^1 existe, en general, para tiempos cortos $0 < t < T$ solamente. Es decir, la existencia de la solución en sentido clásico es **local**.

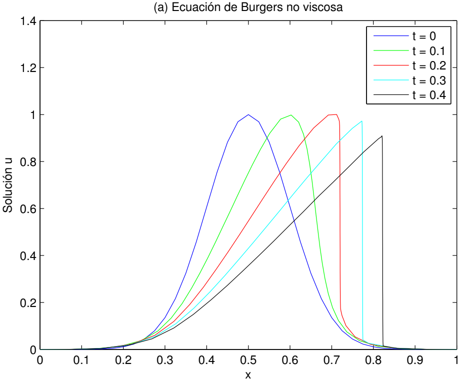

Figura: (a) Solución de la ecuación de Burgers (B) con condición inicial $u_0(x) = \exp(x - 1/2)^2$

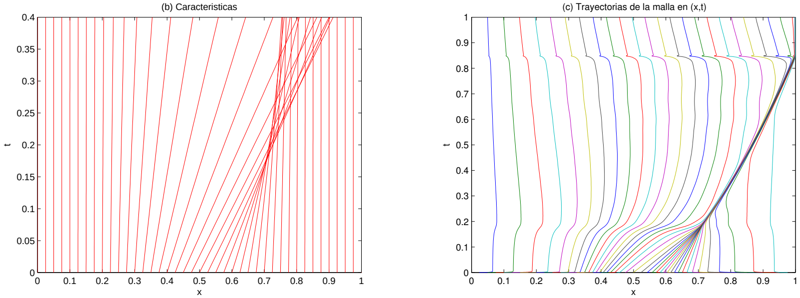

Figura: Rectas características (b) y curvas de nivel (c) de la solución.

1. Motivación: la ecuación de transporte
2. Curvas características
3. Interpretación geométrica. Sistema equivalente

Ecuación de transporte: interpretación geométrica

La solución a la **ecuación escalar de transporte**, $u_t + au_x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $a > 0$ constante y con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, es la onda viajera

$$u(x,t) = u_0(x - at).$$

Observación: la solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos interpretar la solución como una **superficie** en $\mathbb{R}^3$, con parametrización $(x,t,u(x,t)) \subset \mathbb{R}^3$ incluso para $t < 0$. Los datos iniciales del problema están determinados sobre la curva en el plano (x,t) dada por

$$\mathscr{I} = \{(\xi,0) : \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La llamaremos **curva de datos**.

Ecuación de transporte: interpretación geométrica

La solución a la **ecuación escalar de transporte**, $u_t + au_x = 0$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, $a > 0$ constante y con condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, es la onda viajera

$$u(x,t) = u_0(x - at).$$

Observación: la solución está definida para todo $t \in \mathbb{R}$.

Podemos interpretar la solución como una **superficie** en $\mathbb{R}^3$, con parametrización $(x,t,u(x,t)) \subset \mathbb{R}^3$ incluso para $t < 0$. Los datos iniciales del problema están determinados sobre la curva en el plano (x,t) dada por

$$\mathscr{I} = \{(\xi, 0) : \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

La llamaremos **curva de datos**.

La **curva inicial**

$$\mathscr{I}' = \{(\xi, 0, u_0(\xi)) \, : \, \xi \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

es una curva en el espacio, la imagen de $\mathscr{I}$ bajo $u_0(\cdot)$, condición inicial.

De este modo, la solución al problema determina una superficie en el espacio,

$$\mathcal{S} = \{(x, t, u(x,t)) \, : \, (x,t) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3.$$

La llamaremos **superficie solución**. Claramente $\mathscr{I}' \subset \mathcal{S}$.

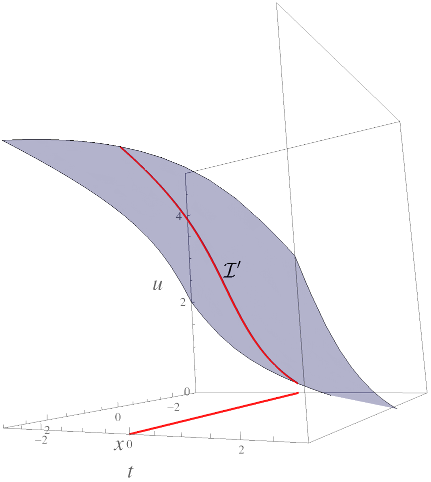

Figura: Superficie solución $\mathcal{S}$ para (ET) con condición inicial $u_0(x) = \text{Arcsinh}(x) + 1$.

El vector normal a la superficie es

$$N = \begin{pmatrix} u_x \\ u_t \\ -1 \end{pmatrix},$$

por lo que el vector constante $(a, 1, 0)^\top \in \mathbb{R}^3$ es tangente a la superficie $\mathcal{S}$ en todo punto:

$$N \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = au_x + u_t = 0.$$

Sistema equivalente

Podemos encontrar una curva sobre la superficie que inicia sobre la curva $\mathscr{I}'$ **cuya tangente sea ortogonal al vector constante** N. Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fijo, consideremos el siguiente sistema característico:

$$\begin{aligned} \frac{d\check{x}}{d\eta} &= a, \qquad \check{x}(0) = \xi, \\ \frac{d\check{t}}{d\eta} &= 1, \qquad \check{t}(0) = 0, \\ \frac{d\check{u}}{d\eta} &= 0, \qquad \check{u}(0) = u_0(\xi). \end{aligned} \tag{SC}$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$, el sistema (SC) se puede integrar directamente, obteniendo:

$$\check{x}(\eta) = a\eta + \xi, \quad \check{t}(\eta) = \eta, \quad \check{u}(\eta) = u_0(\xi).$$

Ésta es una **familia de soluciones**. Si hacemos variar $\xi \in \mathbb{R}$, tenemos una **parametrización** de la forma

$$Z(\eta,\xi) = \begin{pmatrix} \bar{x}(\eta,\xi) \\ \bar{t}(\eta,\xi) \\ \bar{u}(\eta,\xi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a\eta + \xi \\ \eta \\ u_0(\xi) \end{pmatrix}, \quad (\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2.$$

Z determina una superficie parametrizada por $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2$

La normal a la superficie $(\eta,\xi) \mapsto Z(\eta,\xi)$ es distinta de cero en todo punto:

$$
\begin{aligned}
Z_\eta \times Z_\xi = \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{t}_\eta \\ \bar{u}_\eta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{t}_\xi \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_0'(\xi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_0'(\xi) \\ -a u_0'(\xi) \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0.
\end{aligned}
$$

La superficie parametrizada por $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2$ coincide con la superficie $\mathcal{S}$ parametrizada por $(x,t) \in \mathbb{R}^2$

La normal a la superficie $(\eta,\xi) \mapsto Z(\eta,\xi)$ es distinta de cero en todo punto:

$$Z_\eta \times Z_\xi = \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta \\ \bar{t}_\eta \\ \bar{u}_\eta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{x}_\xi \\ \bar{t}_\xi \\ \bar{u}_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_0'(\xi) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_0'(\xi) \\ -au_0'(\xi) \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

La superficie parametrizada por $(\eta,\xi) \in \mathbb{R}^2$ coincide con la superficie $\mathcal{S}$ parametrizada por $(x,t) \in \mathbb{R}^2$

En nuestro caso esto es evidente: definiendo $t = \eta$, $x = \xi + a\eta$, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \{(x, t, u_0(x - at) \,:\, (x,t) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(a\eta + \xi, \eta, u_0(\xi)) \,:\, (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

Esto se debe a que el mapeo $(x,t) \mapsto (\eta, \xi)$ es siempre **invertible** y de que $u = u_0(\xi) = u_0(x - at)$. El hecho de que el mapeo sea invertible (es decir, que el jacobiano sea distinto de cero),

$$\det \begin{pmatrix} \bar{x}_\eta & \bar{x}_\xi \\ \bar{t}_\eta & \bar{t}_\xi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0,$$

significa (geométricamente) que la curva de datos $\mathscr{I}$ **no es una curva característica**.

Método de características

Propuesta metodológica:

- Observamos que habríamos podido obtener la solución al problema resolviendo el sistema característico (SC) e invirtiendo el mapeo $(x,t) \mapsto (\eta,\xi)$.
- Éste será precisamente el método para estudiar ecuaciones más generales con condiciones iniciales sobre curvas arbitrarias, prestando especial atención a la **condición de invertibilidad** entre las diferentes parametrizaciones.
- A esto se le llama **método de características**

Próxima lección: ecuaciones cuasi-lineales