

Biología Matemática I

Tarea 1

1. Modelo continuo con retardo. Vamos a considerar un modelo alternativo al modelo visto en clase para el experimento de Nicholson con insectos adultos que pasan un tiempo $\tau > 0$ en estado larvario. Sea $N = N(t)$ la población de insectos adultos a tiempo $t > 0$ y $\omega > 0$ la razón a la que se les suministra comida. Sea $m > 0$ la frecuencia con la que un individuo adulto necesita alimentarse. Entonces $(\omega - mN)_+$ es la razón excedente a la que se les suministra alimento, donde

$$(\omega - mN)_+ = \begin{cases} \omega - mN, & \text{si } \omega > mN, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $c > 0$ la tasa de mortandad per cápita. Considera el siguiente modelo con retardo,

$$\frac{dN}{dt} = k(\omega - mN(t - \tau))_+ - cN(t), \quad (1)$$

donde $k > 0$ es una constante.

- Encuentra el estado estacionario N_* .
- Definiendo una perturbación $n = N - N_*$ encuentra una ecuación (con retardo) linealizada para n y encuentra la ecuación característica. Analiza su estabilidad en términos del signo de $mk - c$.
- Encuentra el valor del parámetro de bifurcación τ para el cual hay cambio de estabilidad y argumenta a favor de la existencia de soluciones oscilatorias en un intervalo para el parámetro τ .

2. Poblaciones estructuradas. Considera el modelo de McKendrick para poblaciones estructuradas por la edad bajo la hipótesis estacionaria,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial a} + \frac{\partial N}{\partial t} + \mu(a)N &= 0, & a > 0, t > 0, \\ N(0, t) = g(t) &= \int_0^{+\infty} \lambda(a)N(a, t) da, & t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

donde f , λ y μ son funciones conocidas que dependen sólo de la edad $a > 0$.

- Muestra que una función *autosimilar* de la forma $N(a, t) = e^{\gamma t}r(a)$ es solución de (2) siempre que γ satisface

$$\int_0^{+\infty} \lambda(a) \exp\left(-\gamma a - \int_0^a \mu(s) ds\right) da = 1.$$

- Muestra que si la tasa de natalidad $\lambda(a) = 0$ es cero excepto en un intervalo muy pequeño alrededor de $a_0 > 0$ entonces la población tiende a la extinción sin importar la tasa de mortandad $\mu(a)$.

- (c) Si la tasa de mortandad es alta y lineal como función de a , ¿qué se puede decir sobre la tasa de natalidad $\lambda(a)$ para que la población no se extinga?

3. Modelo para dosificación de medicamentos. Considera el siguiente modelo para dosificación de medicamentos,

$$u_{n+1} = (1 - k)u_n + b,$$

donde u_n es la cantidad en miligramos (mg.) del medicamento a tiempo $t = n$.

- (a) Discute el significado de los parámetros k y b . ¿Qué se puede decir de su tamaño y de su signo? ¿Cuáles son sus unidades físicas?
- (b) Encuentra los puntos fijos del mapeo y encuentra su estabilidad usando la técnica de linealización.
- (c) Aplicando la técnica de *cobwebbing* analiza la dinámica del modelo. ¿Que sucede con la cantidad de medicamento en el cuerpo para tiempos largos? ¿Cómo depende el resultado de los parámetros?
- (d) ¿Cómo debemos escoger b de manera que el medicamento es efectivo mas no tóxico?

4. Modelo logístico discreto. En este ejercicio se considera la segunda iteración del modelo logístico discreto, con mapeo $f(u) = ru(1 - u)$.

- (a) Calcula $f^{(2)}(u) = (f \circ f)(u) = f(f(u))$
- (b) Encuentra los puntos fijos de $f^{(2)}(u)$. Verifica que existe un 2-ciclo no trivial sólo cuando $r > 3$.
- (c) Calcula $df^{(2)}(u)/du$
- (d) Verifica que el 2-ciclo es estable si $3 < r < 1 + \sqrt{6}$ e inestable si $r > 1 + \sqrt{6}$.

5. Solución exacta para el modelo de Beverton-Holt. Encuentra la solución exacta para el modelo de Beverton-Holt,

$$u_{n+1} = \frac{Kru_n}{K + (r - 1)u_n},$$

con $u_0 > 0$ dado. *Sugerencia:* Considera la transformación $v_n = 1/u_n$.

6. Modelo discreto para la propagación de una enfermedad infecciosa. Considera el siguiente modelo discreto,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + kI_n(N - I_n), \\ I_0 &= 1, \end{aligned}$$

donde I_n es el número de individuos infectados de una cierta enfermedad a tiempo $t = n$, de una población total de N individuos. Éstos individuos infectados son, a su vez, agentes infecciosos. $k > 0$ es una constante que mide la efectividad de propagación de la enfermedad.

- (a) ¿Cuál es la predicción del modelo si suponemos que $kN < 2$?

Este modelo no toma en cuenta que algunos individuos se recuperan. Si consideramos a un individuo recuperado como inmune a la enfermedad (como ocurre con algunas enfermedades virales) y si suponemos que los individuos se recuperan en exactamente d unidades de tiempo (por ejemplo, días),

- (b) modifica el modelo para incorporar dichos efectos debidos a la inmunidad. Justifica el modelo propuesto. ¿Has hecho algunas hipótesis adicionales?

7. Modelo presa-depredador de tipo Lotka-Volterra con autolimitación. Considera el siguiente modelo (en forma adimensional), con $a > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= u(1 - \epsilon u - v), \\ \frac{dv}{dt} &= av(u - 1).\end{aligned}$$

- (a) Encuentra el punto de equilibrio (u^*, v^*) (coexistencia) y demuestra que es un foco estable para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño.
- (b) Aplica el criterio negativo de Bendixson-Dulac para demostrar que no hay soluciones periódicas al sistema en el cuadrante positivo.
- (c) Funciones de Lyapunov para sistema de tipo Lotka-Volterra suelen tener la forma $\Phi(\mathbf{u}) = \sum c_i(u_i - u_i^* \log u_i)$ donde c_i son constantes positivas. Muestra que

$$\Phi(u, v) = a(u - \log u) + v - v^* \log v,$$

es una función de Lyapunov para este sistema.

- (c) Haz un dibujo del plano fase para este sistema.
- (d) $\dot{\Phi}$ no es negativa definida. Muestra que, no obstante, la coexistencia del estado (u^*, v^*) es globalmente asintóticamente estable para soluciones con condiciones iniciales en el cuadrante positivo.

8. Modelo de competencia. Considera dos especies u y v que compiten por el mismo alimento y sea $f(u, v)$ la razón a la cual dicho alimento es consumido. Supondremos que $f(u, v) \rightarrow +\infty$ si $|(u, v)| \rightarrow +\infty$. Si u y v son soluciones del sistema,

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= r_1 u(1 - \gamma_1 f(u, v)), \\ \frac{dv}{dt} &= r_2 v(1 - \gamma_2 f(u, v)),\end{aligned}$$

con condiciones iniciales $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$,

- (a) muestra que

$$r_2 \gamma_2 \frac{d}{dt}(\log u) - r_1 \gamma_1 \frac{d}{dt}(\log v) = r_1 r_2 (\gamma_2 - \gamma_1).$$

- (b) Integra esta ecuación y deduce un principio de exclusión competitiva, dando la condición para que la especie u predomine sobre la especie v
- (c) Interpreta dicha condición biológicamente

9. Modelo SEIR. Consideremos un modelo epidémico tipo SEIR, donde E representa un estado expuesto (latente).

- (a) Explica el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta IS, & \frac{dE}{dt} &= \beta IS - \delta E, \\ \frac{dI}{dt} &= \delta E - \gamma I, & \frac{dR}{dt} &= \gamma I, \end{aligned}$$

para una infección tipo SEIR.

- (b) En este modelo, ¿qué valor tiene R_0 (razón básica de reproducción)?
- (c) ¿Puede existir un teorema de tipo “límite infeccioso” para este modelo?
- (d) Considera el caso epidémico en el que la infección es introducida por una población inicial susceptible de tamaño N . Muestra el tamaño final de la epidemia es el mismo que el tamaño final para la epidemia tipo SIR.

10. Modelo para enfermedades de transmisión sexual. Consideremos un modelo de infección por enfermedad de transmisión sexual en poblaciones heterosexuales. Por ejemplo, la gonorrea se transmite por una bacteria y confiere poco (o nula) inmunidad. Una proporción grande de mujeres infecciosas son asintomáticas.

- (a) Explica el siguiente modelo para la transmisión de gonorrea en una población heterosexual:

$$\begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= -\beta_{21} I_2 S_1 + \gamma_1 I_1, & \frac{dS_2}{dt} &= -\beta_{12} I_1 S_2 + \gamma_2 I_2, \\ \frac{dI_1}{dt} &= \beta_{21} I_2 S_1 - \gamma_1 I_1, & \frac{dI_2}{dt} &= \beta_{12} I_1 S_2 - \gamma_2 I_2. \end{aligned}$$

¿Por qué, necesariamente, se debe suponer que $\beta_{12} \neq \beta_{21}$? ¿Por qué debe ser γ_1 diferente de γ_2 ?

- (b) Muestra que este sistema de cuatro ecuaciones se puede reducir a un sistema de dos ecuaciones que, en forma adimensional, se escribe como,

$$\frac{dv_1}{d\tau} = \gamma_1 R_{01} (1 - v_1) v_2 - v_1, \quad \frac{dv_2}{d\tau} = \gamma_2 R_{02} (1 - v_2) v_1 - v_2,$$

y da expresiones para R_{01} y R_{02} .

Total: 10 pts.