Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales

Espacios de Sobolev y Ecuaciones Diferenciales Parciales de Tipo Elíptico

Semestre 2021-2

Tarea 1: Espacios de Hilbert y teoría de distribuciones

1. Demuestra que el conjunto $\{\sqrt{2}\sin(n\pi x)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2(0,1)$. Dado que $f(x) = x \in L^2(0,1)$ calcula la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

2. Sea $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{C}$. Sea $A : D_A \subset H \to H$ un operador acotado, D_A denso en H.

(a) Demuestra que para cualesquiera $u, v \in D_A$,

$$\begin{aligned}\langle Au, v\rangle = \frac{1}{4}\Big[&\langle A(u+v), u+v\rangle - \langle A(u-v), u-v\rangle + i\langle A(u+iv), u+iv\rangle \\ &- i\langle A(u-iv), u-iv\rangle\Big]\end{aligned}$$

(b) Demuestra que si $\langle Au, u\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $u \in D_A$ entonces $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ para $u, v \in D_A$ (usar la identidad del paralelogramo).

(c) Si H es un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$ y $\langle Au, u\rangle \geq 0$, prueba que esto *no* implica que la forma bilineal $a(u,v) = \langle Au, v\rangle$ es simétrica. *Sugerencia:* Encuentra un contraejemplo en $\mathbb{R}^2$.

3. Sea $(H, \langle\, ,\, \rangle)$ un espacio de Hilbert sobre $\mathbb{R}$. Sean $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de H y λ_n una sucesión de números reales tales que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \to \infty$ si $n \to \infty$. Se define el operador

$$\begin{aligned} A &: D_A \subset H \to H, \\ A\varphi_n &:= \lambda_n \varphi_n, \end{aligned}$$

con dominio

$$D_A = \Big\{u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \alpha_n^2 < \infty\Big\}.$$

Se definen las funciones

$$\zeta_n := \varphi_n - \beta_n \varphi_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$\text{donde} \quad \beta_n = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}}\right)^{1/2}.$$

Demuestra que:

(a) D_A es denso en H.

(b) $A : D_A \subset H \to H$ es fuertemente positivo.

(c) El espacio de energía es

$$H_A = \Big\{u = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \varphi_n \in H \,:\, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \alpha_n^2 < \infty\Big\}.$$

(d) $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_A$.

(e) $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de H_A.

(f) $\{A\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *no* es una base de H si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty$.

4. Teorema de Nečas. Sean $(H, \langle\, , \,\rangle_H)$ y $(V, \langle\, , \,\rangle_V)$ dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$. Sea $a(\cdot,\cdot) : H \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con la propiedad de que existen constantes positivas $\alpha, \beta, \gamma > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \alpha \|u\|_H \|v\|_V, & \forall\, u \in H,\ \forall\, v \in V, \\ \beta \|v\|_V &\leq \sup_{\substack{u\in H \\ u\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|u\|_H}, & \forall\, v \in V, \\ \gamma \|u\|_H &\leq \sup_{\substack{v\in V \\ v\neq 0}} \frac{a(u,v)}{\|v\|_V}, & \forall\, u \in H. \end{aligned}$$

Sean $h \in H^*$ y $l \in V^*$ arbitrarios. Demuestra que existen únicas soluciones $u \in H$ y $v \in V$ a las ecuaciones

$$\begin{aligned} a(u,w) &= l(w), & \forall\, w \in V, \\ a(z,v) &= h(z), & \forall\, z \in H. \end{aligned}$$

5. Teorema de Aubin-Nitsche. Sean $(H, \langle\, , \,\rangle_H)$ y $(V, \langle\, , \,\rangle_V)$ dos espacios de Hilbert en $\mathbb{R}$ tales que $V \subset H$ y V denso en H. Sea $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Suponemos que $a(\cdot,\cdot)$ es V-elíptica y continua, es decir, existen $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \alpha \|u\|_V \|v\|_V, \\ \beta \|u\|_V^2 &\leq |a(u,u)|, \end{aligned}$$

para cualesquiera $u, v \in V$. Sea $f \in H$ arbitrario. Sea $V_n \subset V$ un subespacio vectorial de dimensión finita. Si $u \in V$ y $u_n \in V_n$ son las soluciones únicas a

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \langle f, v\rangle_H, & \forall v \in V, \\ a(u_n,v_n) &= \langle f, v_n\rangle_H, & \forall v_n \in V_n, \end{aligned}$$

demuestra que

$$\|u - u_n\|_H \leq \alpha \|u - u_n\|_V \sup_{g\in H} \left\{ \frac{1}{\|g\|_H} \inf_{\phi_n \in V_n} \|\phi_g - \phi_n\|_V \right\},$$

donde, para cada $g \in H$, $\phi_g \in V$ es la única solución de

$$a(v,\phi) = \langle g, v\rangle_H, \quad \forall v \in V.$$

6. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

(b) Sea $l_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribución asociada a f. Demuestra que

$$\langle \frac{dl_f}{dx}, \varphi \rangle = -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\, dx,$$

para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Sugerencia: El problema se reduce a evaluar el límite

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} 2\int_{\epsilon}^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{1/2}}\,dx.$$

Integra por partes y escribe

$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}(\varphi(\epsilon)-\varphi(0)) + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(0).$$

7. Aproximaciones de δ.

(a) Sea $B_r = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sea χ_{B_r} la función caracteristica de la bola B_r:

$$\chi_{B_r}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_r, \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Prueba que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|} = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

$|B_r|$ es el volumen de la bola de radio r en $\mathbb{R}^n$.

(b) Sea $\eta_\epsilon = \eta_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, el alisador de Friedrichs:

$$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta(|x|/\epsilon),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1, \\ 0, & |x|\geq 1, \end{cases}$$

donde $C>0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon\,dx = 1$. Demuestra que

$$\lim_{\epsilon\to 0^+} \eta_\epsilon = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

(c) Sea $\Psi = \Psi(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor:

$$\Psi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp(-|x|^2/4t), & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Para cada $t>0$ fijo, Ψ define una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que denotamos por $\Psi(\cdot,t)$. Demuestra que

$$\lim_{t\to 0^+} \Psi(\cdot,t) = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

8. Sea

$$u(x,t) = H(t)\frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}, \qquad x\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R},$$

donde $H = H(t)$ es la función de Heaviside en $t\in\mathbb{R}$. Evalúa, en sentido de distribuciones, $u_t - u_{xx}$.

9. Demostración alternativa de que $\mathcal{F}(1) = \delta$. Vamos a dar por hecho *la cerradura del espacio de distribuciones temperadas*: si $l_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es tal que $\langle l_n,\varphi\rangle \to \langle l,\varphi\rangle$ cuando $n\to+\infty$, entonces $l\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

(a) Demuestra que si $l_n \to l$ en $\mathcal{S}'_x$ entonces $\mathcal{F}(l_n)\to\mathcal{F}(l)$ en $\mathcal{S}'_\xi$

(b) Sea $l_n = l_{f_n} \in \mathcal{S}'_x$, donde

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq n, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Evalúa $\mathcal{F}(l_n)$.

(c) Demuestra que $l_n \to 1$ en $\mathcal{S}'_x$.

(d) Prueba que $\mathcal{F}(l_n) \to \delta$ en $\mathcal{S}'_\xi$ y concluye.

10. Cálculo del inverso del laplaciano en $\mathbb{R}^3$. Sean $x \in \mathbb{R}^3$, $\xi \in \mathbb{R}^3$, y definimos

$$\widehat{K}(\xi) := \frac{1}{|\xi|^2}.$$

(a) Demuestra que $\widehat{K}$ es una distribución temperada en $\mathcal{S}'_\xi(\mathbb{R}^3)$.

(b) Demuestra que $K(x) = K_\infty(x) + K_2(x)$ donde K_∞ es acotada y $K_2 \in L^2_x(\mathbb{R}^3)$ es tal que $(\widehat{K(x)})(\xi) = \widehat{K}(\xi)$. (*Sugerencia:* Escribe $\widehat{K} = \widehat{K}_\infty + \widehat{K}_2$ donde $\widehat{K}_\infty \in L^1$ y $\widehat{K}_2 \in L^2$.)

(c) Prueba que para cualquier matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, con $O^\top O = I$, se tiene que $K(Ox) = K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Considera $\langle K, \varphi \rangle = \int \widehat{K} \widehat{\varphi}\, d\xi$, para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}_x$.)

(d) Demuestra que $K(x/\lambda) = \lambda K(x)$ para cualquier $\lambda > 0$ y concluye que

$$K(x) = \frac{C}{|x|},$$

donde C es una constante (es decir, K es la solución fundamental del laplaciano en $\mathbb{R}^3$.) Calcula la constante C considerando $\langle K, \varphi \rangle$, con $\varphi = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}_x$.

Total: 10 pts.