Lección 4.7: Regularidad de soluciones (continuación).

$$I_A = J_1 + J_2$$

$$J_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \zeta^2 a^{ij,h}(x)\, D_k^h u_{x_i}\, D_k^h u_{x_j}\, dx$$

$$J_2 = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \Big[2\zeta\zeta_{x_j} D_k^h u\, a^{ij,h}(x)\, D_k^h u_{x_i} + (D_k^h a^{ij}(x) u_{x_i})(\zeta^2 D_k^h u)_{x_j} \Big] dx$$

Por elipticidad uniforme:

$$J_1 \geq \theta \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h D u|^2 \, dx$$

Por otra parte $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $0 \leq \zeta \leq 1$, $\zeta \in C^\infty$:

$$|J_2| \leq C \int_\Omega \Big[\zeta\, \underbrace{|D_k^h D u|}\, |D_k^h u| + \zeta\, \underbrace{|D_k^h D u|}\, |Du| + \zeta\, |D_k^h u|\, |Du| \Big] dx$$

con $C > 0$. Por Cauchy-Schwarz, $\forall \epsilon > 0$

$$|J_2| \leq C\epsilon \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h D u|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{C}{\epsilon} \int_\Omega |D_k^h u|^2 dx + \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h u|^2 dx + \int_\Omega \zeta^2 |Du|^2 dx$$

$C\epsilon = \tilde{\hat{\epsilon}}$

$$\leq \tilde{\epsilon} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx \; +$$

$$+ \frac{C}{\tilde{\epsilon}} \int_W \left(|D_k^h u|^2 + |Du|^2 \right) dx$$

Escogemos $\tilde{\epsilon} = \theta/2$ y aplicando la desigualdad

(*) $$\int_W |D_k^h u|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |Du|^2 \, dx$$

(propiedades de D_k^h). obtenemos

$$|J_2| \leq \frac{\theta}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx \; +$$

$$+ \; C_{\tilde{\epsilon}} \int_\Omega |Du|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad I_A = J_1 + J_2$$

$$\geq \frac{\theta}{2} \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx \; - \; C_{\tilde{\epsilon}} \int_\Omega |Du|^2 \, dx \qquad \ldots (1)$$

$$I_B = \left\langle f - \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} - cu, v \right\rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$v = -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$$

b^i, c son coeficientes acotados $(\in C^1(\bar{\Omega}))$.

$$\Rightarrow \quad |I_B| \leq C \int_\Omega \left(|f| + |Du| + |u| \right) |v| \, dx$$

Lema auxiliar: $1 \leq p < \infty$ $u \in W^{1,p}(\Omega)$ entonces $\forall V \subset\subset \Omega$, $\|D^h_k u\|_{L^p(V)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$ $\forall \alpha |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$.

$$\Rightarrow \int_\Omega |v|^2 \, dx = \int_\Omega |-D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx$$

$$\leq C \int_\Omega |D(\zeta^2 D_k^h u)|^2 \, dx$$

$$= C \int_\Omega |2\zeta D\zeta \cdot D_k^h u + \zeta^2 D_k^h Du|^2 \, dx$$

$$\leq C \int_W \left[|D_k^h u|^2 + \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \right] dx$$

$$\leq C \int_\Omega |Du|^2 \, dx + C \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx$$

Así,

$$|I_B| \leq \epsilon^2 \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 \, dx + \frac{C}{\epsilon^2} \int_\Omega |f|^2 \, dx + \frac{C}{\epsilon^2} \int_\Omega |u|^2 \, dx + \frac{C}{\epsilon^2} \int_\Omega |Du|^2 \, dx$$

Tomando $\epsilon^2 = \theta/4$ obtenemos

$$|I_B| \leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx +$$

$$C_\epsilon \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} \right)$$

Combinando :

$$I_A = I_B \leq |I_B|$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx - C\int_\Omega |Du|^2 dx$$

$$\leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx$$

$$+ C_\theta \left(\|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|Du\|^2_{L^2} \right)$$

$$\Rightarrow \int_V |D_k^h Du|^2 dx \leq \int_\Omega \zeta^2 |D_k^h Du|^2 dx$$

$$\leq \tilde{C}_\theta \left(\|f\|^2_{L^2} + \|u\|^2_{L^2} + \|Du\|^2_{L^2} \right).$$

$\forall\ 1 \leq k \leq n, \ \forall\ |h| \neq$ pequeño.

Por el teorema de la sección (3) (diferencias finitas), concluimos que

$Du \in H^1_{loc}(\Omega)$ y por lo tanto $u \in H^2_{loc}(\Omega)$. Además,

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

Dado que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$, el mismo argumento muestra que

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}\right)$$

Tomando $\tilde{\zeta}$ tal que:
$\in C^\infty$

- $\tilde{\zeta} \equiv 1$ en W
- $\operatorname{supp} \tilde{\zeta} \subset \Omega$
- $0 \leq \tilde{\zeta} \leq 1$

y haciendo $v = \tilde{\zeta}^2 u$ en

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} = \langle \tilde{f}, v \rangle_{L^2}$$

obtenemos

$$\int_\Omega \tilde{\zeta}^2 |Du|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |f|^2 + |u|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{H^1(W)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\right).$$

$\square$

Regularidad hasta la frontera

Teorema (regularidad en $H^2(\Omega)$)

Suponemos:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^2$
- $a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$, $b^i \in C(\bar{\Omega})$, $c \in L^\infty(\Omega)$
  $1 \leq i, j \leq n$
- $f \in L^2(\Omega)$

Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema

$$\left. \begin{aligned} Lu &= f \quad \text{en} \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned} \right\} (1)$$

entonces: (a) $u \in H^2(\Omega)$
(b) $\exists\, C > 0$ tal que

$$(2) \cdots \left\{ \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right) \right.$$

observaciones:

(A) Si u es la única solución débil de (1) la estimación (2) se simplifica:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \cdots (3)$$

Esto se deduce del acotamiento de la inversa:

<u>Lema</u>: Si $\lambda \notin \Sigma$ existe $C>0$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}$ siempre que $f \in L^2(\Omega)$, y $u \in H_0^1(\Omega)$ es la única solución débil de

$$\begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

En efecto, si la solución de (1) es única entonces $\lambda = 0 \notin \Sigma$ y se aplica el lema.

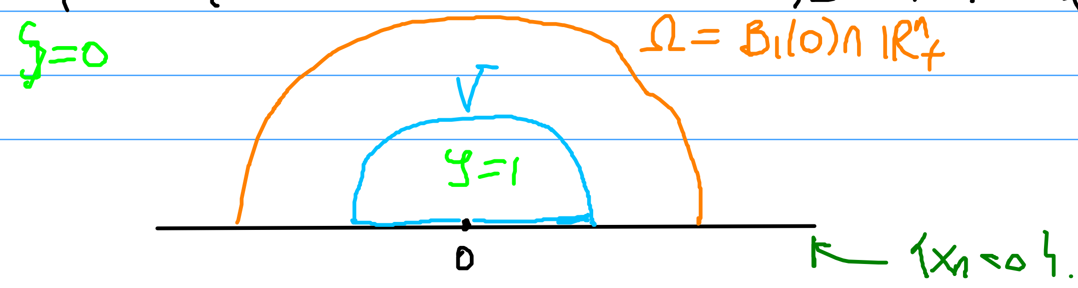
(B) Para la regularidad en el interior $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ no era necesario suponer que $u=0$ en $\partial\Omega$. Aquí sí.

<u>Demostración</u>:

Paso 1: Supongamos que Ω es una "semi-bola" de la forma

$$\Omega = B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$$

$\mathbb{R}^n_+ = \{x_n > 0\}$. $V := B_{1/2}(0) \cap \mathbb{R}^n_+$



Sea ζ una función cut-off tal que

- $\zeta \equiv 1$ en $B_{1/2}(0)$
- $\zeta = 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_1(0)}$
- $\zeta \in C^\infty$
- $0 \leq \zeta \leq 1$

Nótese que $\zeta = 0$ cerca de la parte "curva" de $\partial\Omega$, es decir, $\partial B_1(0) \cap \mathbb{R}^n_+$.

Por ser $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil:

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

ssi
$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx = \int_\Omega \tilde{f} v\, dx \quad \cdots (3)$$

donde
$$\tilde{f} := f - \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} - c(x) u$$

Sea $1 \gg h > 0$ pequeño. Seleccionamos un índice $1 \leq k \leq n-1$, definimos

$$v := -D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)$$

Por definición, notamos que

$$v(x) = -\frac{1}{h} D_k^{-h}\left(\zeta^2 \left(u(x+h\hat{e}_k) - u(x)\right)\right)$$
$$= -\frac{1}{h^2}\left[\zeta^2(x-h\hat{e}_k)\left(u(x)-u(x+h\hat{e}_k)\right) - \zeta^2(x)\left(u(x+h\hat{e}_k) - u(x)\right)\right]$$

Dado que $u=0$ en $\{x_n=0\}$ y $\varphi=0$ en $\partial B_1(0)\cap\mathbb{R}^n_+$, deducimos que

$$v\in H_0^1(\Omega)$$

Sustituyendo en (3):

$$I_A = I_B$$

donde
$$I_A := \sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a^{ij}(x)\,u_{x_i}v_{x_j}\,dx$$

$$I_B := \int_\Omega \tilde{f}\,v\,dx$$

Repitiendo el argumento de la demostración anterior:

$$I_A \geq \frac{\theta}{2}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2\,dx - C\int_\Omega |Du|^2\,dx$$

$$|I_B| \leq \frac{\theta}{4}\int_\Omega \zeta^2|D_k^h Du|^2\,dx + C\int_\Omega \left[|f|^2+|u|^2+|Du|^2\right]dx$$

Sustituyendo:

$$\int_V |D_k^h Du|^2\,dx \leq C\int_\Omega\left(|f|^2+|u|^2+|Du|^2\right)dx$$

$D_k\,\partial_{x_n}u$

$\forall \quad 1 \leq k \leq n-1$.

$\Rightarrow \quad \partial_{x_k} u \in H^1(V)$

Además, se tiene la estimación:

$$\sum_{\substack{k,l=1 \\ k+l<2n}}^{n} \| \partial^2_{x_k x_l} u \|_{L^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)} \right) \quad \cdots (4)$$

Nos falta $\partial^2_{x_n} u$. Escribimos el operador en forma no divergente:

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x)\, u_{x_i} + c(x) u = f$$

donde $\tilde{b}^i(x) = b^i(x) - \sum_{i,j}^{n} a^{ij}(x)_{x_j} \in C(\bar{\Omega})$

$a^{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\Rightarrow \quad a^{nn}(x)\, \partial^2_{x_n} u = -\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}}^{n} a^{ij}(x)\, u_{x_i} u_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i u_{x_i} + c(x) u - f$$

Por elipticidad uniforme:

$$\sum a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2$$

Tomamos $\xi = \hat{e}_n = (0,\dots,0,1)$

$$\Rightarrow \quad a^{nn}(x) \geq \theta > 0 \qquad \forall x \in \Omega$$

Invertimos la ecuación y obtenemos

$$|\partial^2_{x_n} u| \leq C_\theta \Big[\sum_{\substack{i,j=1 \\ i+j<2n}} |u_{x_i x_j}| + |Du| + |u| + |f| \Big]$$

c.d.s. en Ω

$$\Rightarrow \quad \|\partial^2_{x_n} u\|_{L^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

Concluimos que $u \in H^2(V)$ y

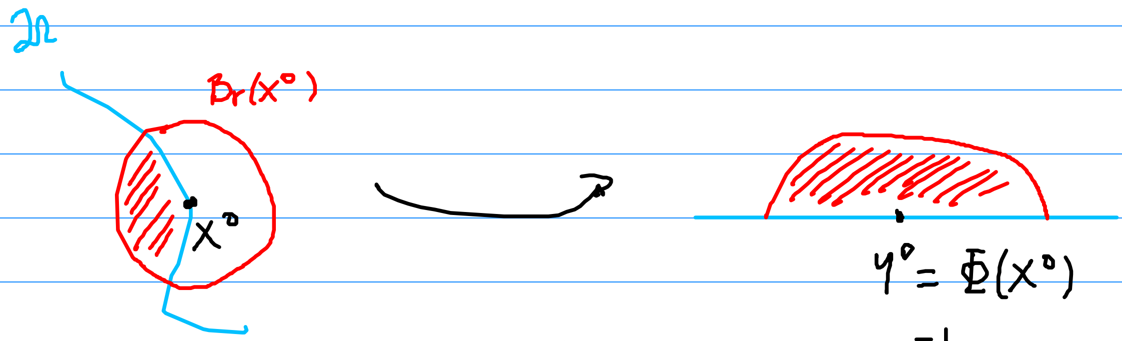
$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right) \quad \dots (5)$$

Paso 2: caso general

Si $x^0 \in \partial\Omega$, $\partial\Omega \in C^2$, $\exists\ \gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, $\gamma \in C^2$ tal que:

$$\Omega \cap B_r(x^0) = \{ x \in B_r(x^0) : x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) \}$$

para cierto $r > 0$.



$$y = \Phi(x), \qquad x = \Phi^{-1}(y) = \Psi(y)$$

$$y_i = x_i =: \Phi^i(x) \qquad 1 \leq i \leq n-1$$

$$y_n = x_n - \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \Phi^n(x)$$

Escogemos $s > 0$ suf. pequeño tal que la media bola

$$\Omega' := B_s(0) \cap \{ y_n > 0 \}$$

está contenida en $\Phi(\Omega \cap B_r(x^0))$.

Sea $V' = B_{s/2}(0) \cap \{ y_n > 0 \}$.

Definimos $\quad u'(y) := u(\Psi(y)), \quad y \in \Omega'$

Por regularidad del mapeo Ψ se puede probar que

$$u \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow u' \in H^1(\Omega')$$

$$\text{y } u' = 0 \text{ en } \partial\Omega' \cap \{ y_n = 0 \}.$$

Además u' es solución débil de

$$L'u' = f' \quad \text{en } \Omega'$$

donde :

- $f'(y) := f(\Phi(y))$
- $L'u' = -\sum_{k,l=1}^{n} (a^{kl'} u'_{y_k})_{x_l} + \sum_{k} b'^k u'_{x_k} + c'u'$

$$a^{kl'}(y) := \sum_{r,s=1}^{n} a^{rs}(\Phi(y))\, \Phi^k_{x_r}(\Phi(y))\, \Phi^l_{x_s}(\Phi(y))$$

$\forall \ 1 \le k, l \le n$

$$b^{k'}(y) := \sum_{r=1}^{n} b^r(\Phi(y))\, \Phi^k_{x_r}(\Phi(y))$$

$1 \le k \le n$

$c'(y) := c(\Phi(y))$.

Aplicar regla de la cadena.

Se puede verificar :

$$a'(u', v') = a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$= \langle f', v' \rangle_{L^2(\Omega')}$$

$|\det D\Phi| = 1$

L' es uniformemente elíptico en Ω'

$$\sum_{k,l} a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l$$

$$= \sum_{r,s} a^{rs}(\Psi(y))\eta_r\eta_s \geq \theta|\eta|^2$$

con $\quad \eta := (D\Phi)\xi$

$$|\xi| \leq C|\eta|$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k,l} a'^{kl}(y)\xi_k\xi_l \geq \frac{\theta}{C}|\xi|^2$$

Aplicando las estimaciones del paso 1:

$$\|u'\|_{H^2(V')} \leq C\left(\|f'\|_{L^2(\Omega')} + \|u'\|_{H^1(\Omega')}\right)$$

$V = \Psi(V')$ haciendo el cambio de variable en las integrales

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{H^1(\Omega)}\right)$$

<u>Paso 3</u>: Refinamos la estimación:

si $\quad V \subset\subset W \subset\subset \Omega \quad$ entonces

$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(W)} + \|u\|_{H^1(W)}\right)$$

Función cut-off χ tal que

- $\chi \in C^\infty$
- $\chi \equiv 1$ en W
- $\operatorname{supp} \chi \subset \Omega$
- $0 \leq \chi \leq 1$

Tomando $v = \chi^2 u$ (mismo argumento):

$$\int_\Omega \chi^2 |Du|^2 \, dx \leq C \int_\Omega |f|^2 + |u|^2 \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{H^1(W)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

$\square$

<u>Teorema</u> (regularidad en H^{m+2})

Sea $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$. Supongamos que:

- $a^{ij}, b^i, c \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$
- $f \in H^m(\Omega)$
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^{m+2}$.

Sea $u \in H^1_0(\Omega)$ una solución débil de

$$\begin{aligned} Lu &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Entonces:

(a) $u \in H^{m+2}(\Omega)$

(b) $\exists\, C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{H^m(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

Si la solución de (1) es única, entonces

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{H^m(\Omega)}$$

Dem. x iteración.

<u>Corolario</u> Si $a^{ij}, b^i, c \in C^\infty(\bar{\Omega})$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ y $\partial\Omega \in C^\infty$. Si u es una solución débil de (1) entonces

$$u \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

(Por el lema de Sobolev.)