Lección 4.6: Operadores elípticos de segundo orden (continuación). Teoría de regularidad.

Recordatorio:

TIJ: $\exists\ \gamma \geq 0$ tal que $\forall\ \mu \geq \gamma$ y $\forall\ f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ al problema

$$\begin{aligned} Lu + \mu u &= f \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

Alternativa de Fredholm: Sea $(H, \langle , \rangle)$ de Hilbert y $K : H \to H$ un operador compacto. Entonces:

(a) $\dim \ker (I-K) < \infty$

(b) $R(I-K)$ es cerrado

(c) $R(I-K) = \ker(I-K^*)^\perp$

(d) $\ker(I-K) = \{0\}$ ssi $R(I-K) = H$

(e) $\dim \ker(I-K) = \dim \ker(I-K^*)$

$K^* : H \to H$ es el adjunto formal

$\langle u, Kv \rangle = \langle K^* u, v \rangle \quad \forall\ u, v \in H$

Lema aux. Si $K : H \to H$ es compacto entonces $K^* : H \to H$ es compacto.

Operador elíptico de 2o. orden:

$$(1) \cdots \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^n \left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i} + c(x) u .$$

con $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $b^i, c \in C^1(\overline{\Omega})$.

Tomando $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ denso en $H_0^1(\Omega)$:

$$
\begin{aligned}
\langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a^{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} v \, dx + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b^i(x) u_{x_i} v \, dx \\
&\quad + \int_\Omega c(x) u v \, dx \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega (a^{ij}(x) v_{x_j})_{x_i} u \, dx \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b^i(x) v_{x_i} u \, dx \\
&\quad + \int_\Omega \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)_{x_i}\right) u v \, dx \\
&= \int_\Omega u \underbrace{\left[-\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij}(x) v_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x) v_{x_j} + \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)_{x_i}\right) v \right]}_{=: L^* v} dx
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \langle Lu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^* v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

Definición (i) El adjunto formal de L es

$$(2) \cdots \quad L^* v := -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) v_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{i=1}^{n} b^i(x) v_{x_i} + \left(c(x) - \sum_{i=1}^{n} b^i(x)_{x_i}\right) v$$

suponiendo $b_i \in C^1(\bar{\Omega})$, $\forall\ 1 \leq i \leq n$

(ii) La forma bilineal adjunta
$a_* : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$, $H = H_0^1(\Omega)$
se define como

$$a_*(v,u) = a(u,v) \qquad \forall\ u, v \in H_0^1$$

(iii) Decimos que $v \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema adjunto asociado

$$(3) \cdots \quad \begin{cases} L^* v = f & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

si se cumple

$$(4) \cdots \quad b_*(v,u) = \langle f, u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

Lema $b_*(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal de Dirichlet del operador L^*.

Dem. Ejercicio (int. por partes) $\square$

T27 : Teorema 2 (existencia)

Uno y sólo uno de los siguientes enunciados es cierto :

(A) ... Para todo $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de

$$\left.\begin{array}{ll} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right\} (5)$$

tal que $a(u,v) = \langle f, v \rangle \ \forall v \in H_0^1$.

o bien,

(B) --- Existe una solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$, no trivial. $u \not\equiv 0$ al problema homogéneo

$$\left.\begin{array}{ll} Lu = 0 & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right\} (6)$$

Mas aún, si (B) es cierto entonces la dimensión del subespacio $N \subset H_0^1(\Omega)$ de soluciones débiles de (6) es finita, y $\dim N = \dim N^*$, donde N^* es el subespacio de $H_0^1(\Omega)$ de soluciones débiles $v \in H_0^1(\Omega)$ al problema

$$\left.\begin{array}{ll} L^* v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right\} (7).$$

Finalmente, el problema (5) tiene solución débil ssi

$$\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall v \in N^*.$$

Demostración: Escogemos $\mu = \gamma$ como en el teorema T17 y definimos

$$a_\gamma(u,v) = a(u,v) + \gamma \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$a_\gamma : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$$

Por T13, $\forall g \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de $\begin{cases} L_\gamma u = g & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$

es decir, $$a_\gamma(u,v) = \langle g, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Notación: escribimos $u := L_\gamma^{-1} g$

Operador solución $L_\gamma^{-1} : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$

Observamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema (5) ssi

$$a_\gamma(u,v) = \langle \gamma u + f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

En efecto,

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Leftrightarrow \quad a(u,v) + \gamma\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f,v\rangle_{L^2(\Omega)} + \gamma\langle u,v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v\in H_0^1(\Omega)$$

Así, $u\in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de (5) ssi

$$u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f)$$

Definimos $Ku := \gamma L_\gamma^{-1} u$, de modo que

$$u - Ku = u - \gamma L_\gamma^{-1} u = h$$

$$\text{con } h := L_\gamma^{-1} f$$

Como $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ (inclusión densa) podemos considerar al operador

$$K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

K es acotado, lineal y compacto (de L^2 a L^2).

K es lineal: si $L_\gamma^{-1}(g_1+g_2) = u$ entonces

$$L_\gamma u = g_1 + g_2$$

Pero si u_1, u_2 son las únicas soluciones débiles de $\begin{cases} L_\gamma u_j = g_j & \text{en } \Omega \\ u_j = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$ $j=1,2$

entonces u_1+u_2 es la única solución débil en $H_0^1(\Omega)$ de

$$Lu = g_1+g_2 \quad \text{en } \Omega$$
$$u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

$$\therefore \quad L_\gamma^{-1}(g_1+g_2) = L_\gamma^{-1} g_1 + L_\gamma^{-1} g_2$$

$\therefore$ K es lineal.

Por la elección $\mu = \gamma \geq 0$ de las estimaciones de energía

$$\beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq a_\gamma(u,u) = \langle g, u\rangle_{L^2(\Omega)}$$
$$\leq \|g\|_{L^2} \|u\|_{H^1}$$

$$\therefore \quad \|L_\gamma^{-1} g\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{L^2}$$

$$\|Kg\|_{L^2} \leq \|Kg\|_{H^1} = \|L_\gamma^{-1} g\|_{H^1} \leq C_\beta \|g\|_{L^2}$$

$\therefore$ K es acotado.

Sea $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ una sucesión acotada. Entonces $Kg_k \in H_0^1(\Omega)$ es una sucesión acotada:

$$\|Kg_k\|_{H^1(\Omega)} \leq C_\beta \|g_k\|_{L^2} \leq \bar{C}$$

Por Rellich $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$, existe una subsucesión Kg_k convergente en $L^2(\Omega)$:

$$Kg_k \longrightarrow \tilde{h} \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

$\therefore$ K es un operador compacto.

Aplicando la alternativa de Fredholm: se cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones

$(\tilde{A})$ $\left\{ \begin{array}{l} \forall\, h \in L^2(\Omega) \text{ la ecuación} \\ \qquad u - Ku = h \\ \text{tiene una única solución } u \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$

o bien,

$(\tilde{B})$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{La ecuación } u - Ku = 0 \text{ tiene} \\ \text{soluciones no triviales } u \in L^2(\Omega) \end{array} \right.$

Suponiendo $(\tilde{A})$: definimos $h := L_\gamma^{-1} f \in L^2$

$\therefore$ $u - Ku = h$ ssi $u - \gamma L_\gamma^{-1} u = L_\gamma^{-1} f$

ssi $u = L_\gamma^{-1}(\gamma u + f)$

ssi $a_\gamma(u,v) = \langle \gamma u + f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$

ssi $a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$ $\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$

es decir, u es la única solución débil de (S).

Suponiendo $(\hat{B})$: necesariamente $\gamma > 0$ [si $\gamma = 0$ entonces estaríamos en el caso $(\hat{A})$ ya que hay una única sol. débil).

Por la alternativa de Fredholm

$$\infty > \dim N = \dim N^*$$

N^* = espacio de soluciones $v \in H_0^1(\Omega)$ de $v - K^* v = 0$.

Pero, $u - Ku = 0$ tiene una solución no trivial en $L^2(\Omega)$. Por lo tanto,

$$L_\gamma^{-1}(\gamma u) = u$$

$$R(L_\gamma^{-1}) = H_0^1(\Omega) \quad \text{ssi} \quad \gamma u = L_\gamma u$$

$$\text{ssi} \quad a_\gamma(u,v) = \langle \gamma u, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

solución débil de (6).

En efecto,

$$a_\gamma(u,v) = a(u,v) + \gamma \langle u,v \rangle_{L^2} = \langle \gamma u, v \rangle_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad a(u,v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Es decir, u es solución débil de

$$\begin{aligned} Lu &= 0 \quad \text{en } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

i.e. de (6).

Análogamente,

$$v - K^* v = 0$$

$\iff$ v es solución débil de

$$(7) \begin{cases} L^* v = 0 & \text{en } \Omega \\ v = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Finalmente, usando (c):

$u \in L^2(\Omega)$, $u \neq 0$ es solución de

$$u - Ku = h$$

si y sólo si $\langle h, v \rangle_{L^2} = 0$

$\forall\, v \in \ker(I - K^*)$

Dado que $\gamma > 0$

$$\langle h, v \rangle_{L^2} = \langle L_\gamma^{-1} f, v \rangle_{L^2} = \frac{1}{\gamma} \langle \gamma L_\gamma^{-1} f, v \rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \langle Kf, v \rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \langle f, K^* v \rangle_{L^2}$$

$$= \frac{1}{\gamma} \langle f, v \rangle_{L^2}$$

En el caso $\gamma = 0$ claramente existe una única solución débil y $\ker N^* = \ker N = \{0\}$.

$$\therefore \quad \langle f, v \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall v \in N^*$$

(5) tiene solución débil ssi $\langle f, v \rangle_{L^2} = 0$ $\forall v \in N^*$

$\square$

T37: <u>Teorema</u> (de existencia)

(i) Existe un conjunto numerable $\Sigma \subset \mathbb{R}$ tal que el problema

$$(1) \cdot\cdot \begin{cases} Lu = \lambda u + f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$ si y sólo si $\lambda \notin \Sigma$.

(ii) Si Σ es infinito, entonces $\Sigma = \{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ donde

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots$$

y además $\lambda_j \to \infty$ si $j \to \infty$.

Definición Σ es el espectro del operador L con datos de Dirichlet.

Nota: El problema (1) con $f=0$

$$(2)\dots \begin{cases} Lu = \lambda u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una solución débil no trivial en $H_0^1(\Omega)$ si y sólo si $\lambda \in \Sigma$.
En ese caso λ se denomina valor propio de L y $u \in H_0^1(\Omega)$ es una función propia.

Demostración (del T3 $\exists$):

Sea $\gamma \geq 0$ la constante del teorema T2 $\exists$ (la estimación de energía). Supongamos que $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > -\gamma$.

Paso 1: Suponemos $\gamma > 0$.

Por el teorema T2 $\exists$ (1) tiene una única solución débil para cada $f \in L^2(\Omega)$ ssi $u=0$ es la única solución del problema homogéneo. Esto es cierto ssi $u=0$ es la única sol. débil de

$$(3)\dots \begin{cases} Lu + \gamma u = (\gamma+\lambda) u & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Es decir, si $u = L_\gamma^{-1}(\gamma+\lambda)u$

$$= \left(\frac{\gamma+\lambda}{\gamma}\right) Ku$$

donde $K = \gamma L_\gamma^{-1}$ es acotado, lineal, compacto.

Si $u=0$ es la única solución de (3) entonces

$$\frac{\gamma}{\gamma+\lambda}$$ no es un valor propio de K.

Es decir, (1) tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ para cada $f \in L^2(\Omega)$ ssi

$$\frac{\gamma}{\gamma+\lambda} \notin \sigma(K)$$

<u>Lema</u>: H de Hilbert, $\dim H = \infty$, $K: H \to H$ compacto, entonces:

(i) $0 \in \sigma(K)$
(ii) $\sigma(K) \setminus \{0\}$ es finito, o bien, $\sigma(K) \setminus \{0\}$ es una sucesión que tiende a cero.

(Ver Sección L).

$\sigma(K)$ es finito o una sucesión que converge a cero.

como $\lambda > -\gamma$,

$\dfrac{\gamma}{\lambda+\gamma}$ no es valor propio de K

sí $u=0$ es la única solución de (2)

concluimos que (1) tiene única solución débil $\forall\ f \in L^2(\Omega)$ excepto en un conjunto finito de λ's o bien en una sucesión

$$\infty \leftarrow \lambda_j \quad \text{ssi} \quad \frac{\gamma}{\lambda_j+\gamma} \longrightarrow 0.$$

Paso 2: $\gamma \geq 0$ Ejercicio. (Análogo)

$\square$

Problemas variacionales de tipo elíptico

- biarmónica
- problema del obstáculo
- L elíptico + cond. Neumann $\Rightarrow \sigma(L_N)$ operador y Neumann.

(Kesavan, Attouch, Brezis).

Teoría de regularidad para operadores elípticos de 2o. orden

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado. Supongamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de

$$(1) \cdots \begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$ y L es el operador elíptico de 2o. orden

$$(2) \text{--} \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

uniformemente elíptico, a^{ij}, b^i, c suf. regulares.

Teorema (regularidad en el interior)

Sean $a^{ij} \in C^1(\Omega)$, $b^i, c \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$. Supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ es tal que

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde $a(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal asociada a L. Entonces:

(a) $u \in H^2_{loc}(\Omega)$

(b) para cada V abierto, $V \subset\subset \Omega$,

(3)..
$$\|u\|_{H^2(V)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

donde $C>0$ depende de V, Ω, a^{ij}, b^i, c.

Observaciones:

1. Notamos que no es necesario suponer que $u \in H_0^1(\Omega)$.

2. Como $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ entonces $\underset{\in L^2_{loc}(\Omega)}{Lu} = \underset{\in L^2(\Omega)}{f}$ se cumple c.d.s. en todo $V \subset\subset \Omega$, esto significa que u es una solución fuerte de $Lu = f$ en el interior de Ω. En efecto, sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Como

$$a(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$u \in H^2_{loc}(\Omega)$ podemos integrar por partes:

$$a(u,\varphi) = \langle Lu, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2}$$

$\Rightarrow \quad \langle Lu - f, \varphi \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$\Rightarrow \quad Lu = f$ c.d.s. en todo abierto $V \subset\subset \Omega$.

<u>Demostración:</u>

Sea V abierto, $V \subset\subset \Omega$, fijo.

Sea W abierto tal que $V \subset\subset W \subset\subset \Omega$.

Sea $\zeta \in C^\infty$ una función cut-off tal que:

- $\zeta \equiv 1$ en V
- $\zeta \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{W}$
- $0 \leq \zeta \leq 1$

$W \subset\subset \Omega$ entonces $\operatorname{dist}(W, \partial\Omega) > 0$.

$u \in H^1(\Omega)$ solución débil

$a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \Rightarrow$

$\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} \, dx$$

$$= \langle \tilde{f}, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

donde $\tilde{f} := f - \underbrace{\sum_{i=1}^n b^i(x) u_{x_i}}_{\in L^2} - \underbrace{c(x) u}_{\in L^2}$

Sea $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$, $|h| \ll 1$ pequeño.

Sea $1 \leq k \leq n$. Se define:

$$D_k^h u(x) := h^{-1}\left(u(x+h\hat{e}_k) - u(x)\right)$$

Tomando:

$$v := -D_k^{-h}\left(\zeta^2 D_k^h u\right) \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \qquad I_A = I_B$$

donde

$$I_A := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} \, dx$$

$$I_B := \langle \tilde{f}, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

Estimación de I_A:

$$I_A = -\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} \left(D_k^{-h}(\zeta^2 D_k^h u)\right)_{x_j} dx$$

Se puede demostrar (ejercicio):

$$\int_\Omega v \, D_k^{-h} w \, dx = -\int_\Omega w \, D_k^h v \, dx$$

$$\forall v, w \in H_0^1(\Omega)$$

Además por definición

$$D_k^h(vw) = v^h D_k^h w + w D_k^h v$$

$$v^h(x) := v(x + h\hat{e}_k)$$

Además,

$$(D_k^h w)_{x_j} = D_k^h w_{x_j}$$

$$(D_k^{-h} w)_{x_j} = D_k^{-h} w_{x_j}.$$

Por ende,

$$I_A = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_k^h\left(a^{ij}(x) u_{x_i}\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{x_j} dx$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left[a^{ij,h}(x) D_k^h u_{x_i} + (D_k^h a^{ij})(x)\, u_{x_i} \right] \left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{x_j} dx$$

$$= J_1 + J_2$$

donde

$$J_1 := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \zeta^2 a^{ij,h}(x) D_k^h u_{x_i} D_k^h u_{x_j} \, dx$$

$$J_2 := \sum_{i,j=1}^{n} \left[2\zeta\zeta_{x_j} D_k^h u \, a^{ij,h}(x) D_k^h u_{x_i} + \left(D_k^h a^{ij}(x) u_{x_i}\right)\left(\zeta^2 D_k^h u\right)_{x_j} \right] dx$$