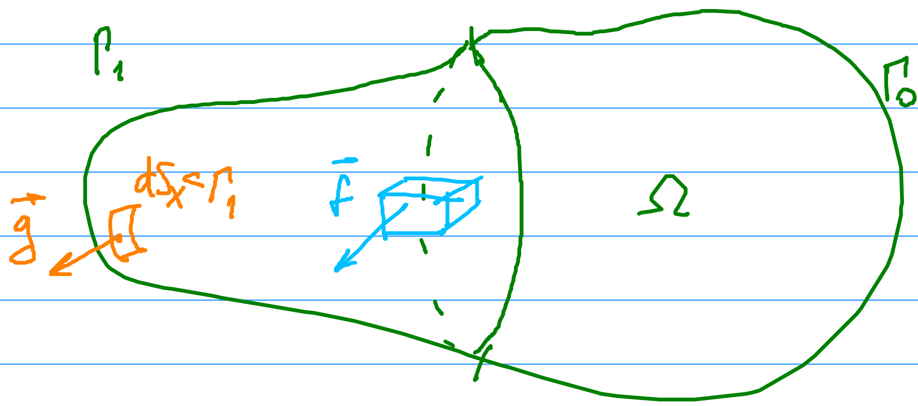
Lección 4.4: Formulación débil: elasticidad lineal y el problema de Stokes.

Elasticidad

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, abierto, acotado : configuración de referencia $\longrightarrow$ lugar que ocupa un material elástico. Sea $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, con $\Gamma_1 \cap \Gamma_0 = \phi$, $|\Gamma_0|, |\Gamma_1| > 0$, $\partial\Omega \in C^1$.

Suponemos que :

- el material está fijo en $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$
- una fuerza volumétrica actúa en todo Ω, $\bar{f}$ (densidad)
- $\exists$ una densidad superficial de fuerzas conocida en $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$ ($\bar{g}$, densidad superficial).

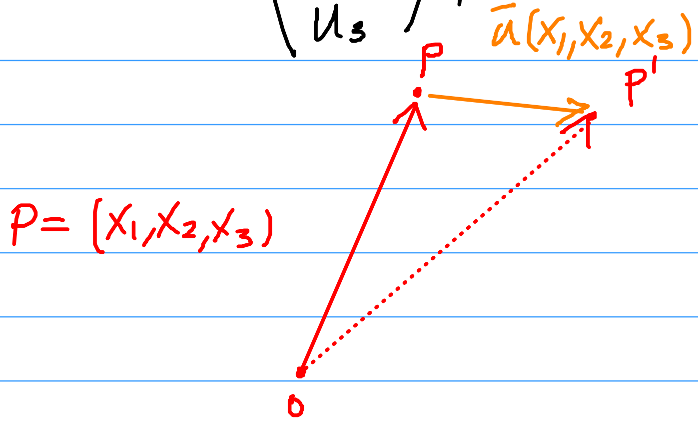


Fuerzas representadas por los campos :

$$\left.\begin{aligned} \bar{f} &= \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{f} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \bar{g} &= \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{g} : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

se describe la deformación del medio elástico a través del desplazamiento

$$(2) \qquad \bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \qquad \bar{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$$



El tensor de deformación se define como:

$$(3) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3} \\ \varepsilon(u) = \frac{1}{2}\left(\nabla\bar{u} + \nabla\bar{u}^T \right) \\ \varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}\left(\partial_{x_j} u_i + \partial_{x_i} u_j \right), \quad 1 \leq i,j \leq 3 \end{array} \right.$$

Tensor de stress de Piola-Kirchhoff: se define a través de una relación constitutiva (p.ej. ley de Hooke):

$$(4) \ldots \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{ij}(\bar{u}) := \lambda \left(\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{kk}(\bar{u}) \right) \delta_i^j + \\ \qquad + 2\mu\, \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \qquad 1 \leq i,j \leq 3 \\ \sigma : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 3} \end{array} \right.$$

donde $\lambda \geq 0$, $\mu > 0$ constantes de Lamé.

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Ecuaciones de elasticidad lineal :

$$(5)\begin{cases} -\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}) = f_i & \text{en } \Omega, \quad 1\le i\le 3 \\ \bar{u} = 0 & \text{sobre } \Gamma_0 \\ \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u})\,\nu_j = g_i & \text{sobre } \Gamma_1, \quad 1\le i\le 3 \end{cases}$$

$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}$, $|\hat{\nu}| = 1$, normal unitario exterior en Γ_1.

Suponemos que :
- $\bar{f} \in L^2(\Omega)^3$
- $\bar{g} \in L^2(\partial\Omega)^3$

Definimos el subespacio :

$$(6)\ldots \quad V = \left\{ v \in H^1(\Omega)^3 : \gamma_0(v_j)_{|\Gamma_0} = 0, \quad 1\le j\le 3 \right\}$$

<u>Lema</u> V es un subespacio de Hilbert de $H^1(\Omega)^3$ con producto interno $\langle\,,\,\rangle_{H^1(\Omega)}$.

<u>Dem.</u> Ejercicio: consecuencia de la continuidad del operador de traza. $\square$

Forma bilineal :

$$(7)\ldots \quad a(\bar{u},\bar{v}) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u})\,\varepsilon_{ij}(\bar{v})\,dx$$

$$= \int_\Omega \lambda \operatorname{div}\bar{u} \operatorname{div}\bar{v} + 2\mu \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\bar{u})\,\varepsilon_{ij}(\bar{v})\,dx$$

Notamos que: • $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica en $V\times V$.

• " es continua en $V\times V$

Formulación débil del problema (5):

$$(8)\ldots \begin{cases} \text{Hallar } \bar{u}\in V \subset H^1(\Omega)^3 \text{ tal que} \\ a(\bar{u},\bar{v}) = \int_\Omega \bar{f}\cdot\bar{v}\,dx + \int_{\Gamma_1} \bar{g}\cdot\gamma_0(\bar{v})\,dS_x \quad \forall \bar{v}\in V \\ \text{donde} \quad \gamma_0(\bar{v}) = \begin{pmatrix}\gamma_0(v_1)\\ \gamma_0(v_2)\\ \gamma_0(v_3)\end{pmatrix} \\ \text{y } a(\cdot,\cdot) \text{ está definida en (7)} \end{cases}$$

Observación: si $\bar{u}\in V$ es solución débil de (8) tal que $\bar{u}\in C^2(\bar{\Omega})^3$ entonces $\forall\, \bar{v}\in V\cap C^2(\bar{\Omega})^3$ se tiene

$$a(\bar{u},\bar{v}) = \int_\Omega \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u})(\partial_{x_i} v_j + \partial_{x_j} v_i)\,dx$$

σ simétrico

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u})\,\partial_{x_j} v_i\,dx$$

fórmula de Green

$$= -\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_j}\sigma_{ij}(\bar{u})\,v_i\,dx + \int_{\Gamma_1} \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u})\,v_i\,\nu_j\,dS_x$$

$\bar{v}\in V$, $\bar{v}_{|\Gamma_0}=0$

$$= \int_\Omega \bar{f}\cdot\bar{v}\,dx + \int_{\Gamma_1} \bar{g}\cdot\bar{v}\,dS_x$$

Si además $\bar{v} \in C_0^\infty(\Omega)^3$ entonces

$$-\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \partial_{x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}) v_i \, dx = \int_\Omega \sum_{i=1}^{3} f_i v_i \, dx$$

Tomando $\bar{v} = (\varphi,0,0), (0,\varphi,0), (0,0,\varphi)$
con $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq i \leq 3$

$$-\sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}) = f_i \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Como
$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{3} \left(f_i + \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}) \right) v_i = 0$$
$$\forall\ v_i \in C_0^\infty(\Omega)$$

Por teo. de localización

$$f_i + \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \sigma_{ij}(\bar{u}) = 0 \quad \text{c.d.s. en } \Omega$$
$$\forall\ 1 \leq i \leq 3$$

Sustituyendo:

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij}(\bar{u}) v_i \nu_j \, dS_x = \int_{\Gamma_1} \sum_{i=1}^{3} g_i v_i \, dS_x$$
$$\forall\ \bar{v} \in V$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{3} \sigma_{ij}(\bar{u}) \nu_j = g_i \quad \text{c.d.s. en } \Gamma_1$$
$$\forall\ 1 \leq i \leq 3$$

$\exists$ de la solución débil :

$a(\cdot,\cdot)$ es simétrica y continua.

$a(\cdot,\cdot)$ es V-elíptica.

Lema 1 Sea $\bar{v} \in V$ tal que $\varepsilon_{ij}(\bar{v}) = 0$ $\forall$ $1 \leq i,j \leq 3$. Entonces $\bar{v} = 0$.

Dem. Por demostrar: $\varepsilon_{ij}(\bar{v}) = 0$ para cierto $\bar{v} \in H^1(\Omega)^3$ entonces $\bar{v}$ debe ser un desplazamiento rígido

$$\bar{v}(x) = \hat{a} + \hat{b} \wedge x$$

con $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{R}^3$.

$$\varepsilon(\bar{v}) = 0 \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \cdot\ \partial_{x_1} v_1 = \partial_{x_2} v_2 = \partial_{x_3} v_3 = 0 \\ \cdot\ \partial_{x_1} v_2 + \partial_{x_2} v_1 = 0 \\ \cdot\ \partial_{x_1} v_3 + \partial_{x_3} v_1 = 0 \\ \cdot\ \partial_{x_2} v_3 + \partial_{x_3} v_2 = 0 \end{array}$$

Deducimos la existencia de $\Phi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$, $\Psi = \Psi(x_1, x_2, x_3)$ tales que

$$v_1 = \partial_{x_1} \Phi, \quad v_2 = -\partial_{x_2} \Phi = \partial_{x_2} \Psi$$

$$v_3 = -\partial_{x_3} \Psi$$

Pero $\left.\begin{array}{l}\partial_{x_1} v_1 = 0 \\ \partial_{x_2} v_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Φ es a lo más lineal en x_1, x_2

$\left.\begin{array}{l}\partial_{x_2} v_2 = 0 \\ \partial_{x_3} v_3 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow$ Ψ es a lo más lineal en x_2, x_3

$$\Rightarrow \quad \Phi = \left(a + b x_1 + c x_2 + d x_1 x_2 + e x_2 x_3 + f x_1 x_3\right) \phi(x_3)$$

$$\Psi = \left(a' + b' x_2 + c' x_3 + d' x_2 x_3 + e' x_1 x_3 + f' x_1 x_2\right) \psi(x_1)$$

Además $\quad v_2 = -\partial_{x_2} \Phi = \partial_{x_2} \Psi$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\left(-c - d x_1 - e x_3\right) \phi(x_3)}_{-\partial_{x_2}\Phi} = \underbrace{\left(b' + d' x_3 + f' x_1\right) \psi(x_1)}_{+\partial_{x_2}\Psi}$$

$-\partial_{x_2}\Phi$ lineal en x_1 ya que Φ " "

$+\partial_{x_2}\Psi$ lineal en x_3 ya que Ψ " "

$\Rightarrow \quad \phi(x_3), \psi(x_1)$ son constantes

w.l.o.g. $\quad \phi = \psi \equiv 1$.

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 &= b + d x_2 + f x_3 \\ v_2 &= -c - d x_1 - e x_3 \\ v_3 &= -c' + d' x_2 - e' x_1 \end{aligned}$$

Usando $\varepsilon_{13}(\vec{v}) = \partial_{x_1} v_3 + \partial_{x_3} v_1 = 0$ entonces $f = e'$. $\quad \varepsilon_{23}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow e = -d'$

$\Rightarrow \quad v_3 = -c' + e x_2 - f x_1$, es decir,

$$v(x) = \begin{pmatrix} b + f x_3 + d x_2 \\ -c - d x_1 - e x_3 \\ -c' + e x_3 - f x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -c \\ -c' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \\ -d \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$=: \hat{a} + \hat{b} \wedge x.$$ Desplazamiento rígido.

Ahora, si $\bar{v} \in V$ entonces $\bar{v} = 0$ sobre Γ_0. $|\Gamma_0| > 0$ $\therefore$ $\bar{v}$ debe anularse al menos en 3 puntos no colineales.

$$\Rightarrow \hat{a} = \hat{b} = 0 \qquad \therefore \quad \bar{v} = 0 \qquad \square$$

Lema 2 La forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ definida en (7) es V-elíptica.

<u>Dem.</u> Por demostrar: $\exists$ $C > 0$ tal que

$$a(\bar{v}, \bar{v}) \geq C \, \|\bar{v}\|^2_{H^1(\Omega)} \qquad \forall \bar{v} \in V \subset H^1(\Omega)^3$$

Por contradicción: $\exists$ sucesión $\bar{v}_m \in V$, $m \in \mathbb{N}$ tal que $\|\bar{v}_m\|_{H^1} = 1$ y

$$a(\bar{v}_m, \bar{v}_m) < \frac{1}{m} \|\bar{v}_m\|_{H^1} = \frac{1}{m} \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

Esto implica que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\bar{v}_m)|^2 \to 0 \quad \text{si } m \to \infty$$

Como $\bar{v}_m$ es acotada en $H^1(\Omega)^3$, por Rellich-Kondrachov $V \subset H^1(\Omega)^3 \subset\subset L^2(\Omega)^3$

existe una subsucesión $\bar{v}_m$ convergente en $L^2(\Omega)^3$: $\bar{v}_m \to \bar{v}$ en $L^2(\Omega)^3$ para cierto $\bar{v} \in L^2(\Omega)^3$.

Por lo tanto,

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\bar{v})|^2 dx$$

$$\leq \liminf_{m \to \infty} \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega |\varepsilon_{ij}(\bar{v}_m)|^2 dx = 0$$

$\therefore \varepsilon(\bar{v}) = 0$ Además $\gamma_0(\bar{v})_{|\Gamma_0} = 0$

$\therefore \bar{v} \in V$ Por lema 1 : $\bar{v} = 0$.

Por otro lado : x desigualdad de Korn $\exists\, C > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{3} \|\varepsilon_{ij}(\bar{v}_m)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\bar{v}_m\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\geq C \underbrace{\|\bar{v}_m\|^2_{H^1(\Omega)}}_{=1} = C > 0$$

Tomando $m \to \infty$ obtenemos una contradicción

$\square$

Por lema 2 : $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, continua y V-elíptica.

$\Rightarrow a(\cdot,\cdot)$ induce un producto interno en V equivalente a $\langle , \rangle_{H^1(\Omega)}$.

Por el teorema de Riesz $\exists!\ \bar{u} \in V$ solución débil de (8):

$$a(\bar{u},\bar{v}) = \ell(\bar{v}) \qquad \forall\, \bar{v} \in V$$

con $\ell \in V^*$, $\ell(\bar{v}) := \int_\Omega \bar{f} \cdot \bar{v}\, dx +$

$$+ \int_{\Gamma_1} \bar{g} \cdot \gamma_0(\bar{v})\, dS_x$$

Mas aún, tomando $K \equiv V$ (convexo y cerrado) concluimos que $\bar{u} \in V$ es solución del problema variacional

$$(9)\ldots \begin{cases} \bar{u} \in V, \qquad J[\bar{u}] = \min\limits_{\bar{v} \in V} J[\bar{v}] \\ J[\bar{v}] = \frac{1}{2} a(\bar{v},\bar{v}) - \ell(\bar{v}), \quad \bar{v} \in V \end{cases}$$

Hemos demostrado:

<u>Teorema</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$, $|\Gamma_0|, |\Gamma_1| > 0$. Entonces existe una única solución

$$\bar{u} \in V = \{ \bar{v} \in H^1(\Omega)^3 : \gamma_0(\bar{v})_{|\Gamma_0} = 0 \} \subset H^1(\Omega)^3$$

tal que

$$a(\bar{u},\bar{v}) = \int_\Omega \bar{f} \cdot \bar{v}\, dS_x + \int_{\Gamma_1} \bar{g} \cdot \gamma_0(\bar{v})\, dS_x$$

con:

$$a(\bar{u},\bar{v}) = \int_\Omega \lambda (\operatorname{div} \bar{u})(\operatorname{div} \bar{v})\, dx + $$
$$+ 2\mu \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{ij}(\bar{u})\, \varepsilon_{ij}(\bar{v})\, dx$$

para cualesquiera $f \in L^2(\Omega)^3$, $g \in L^2(\partial\Omega)^3$.

Además, $\bar{u} \in V$ minimiza en V al funcional

$$J[\bar{v}] = \frac{1}{2} a(\bar{v},\bar{v}) - \int_\Omega \bar{f} \cdot \bar{v}\, dx$$
$$- \int_{\Gamma_1} \bar{g} \cdot \gamma_0(\bar{v})\, dS_x .$$

Problema de Stokes

Nota preliminar: para cada $u \in H^1(\Omega)$, su gradiente, ∇u, está definido en sentido débil: $\nabla u \in L^1_{loc}(\Omega)^n$ tal que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \bar{\varphi}\, dx = - \int_\Omega u \operatorname{div} \varphi \, dx$$
$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)^n$$

Por densidad de $C_0^\infty(\Omega)^n$ en $H_0^1(\Omega)^n$ se puede definir el siguiente funcional

(1) $$\begin{cases} l_{\nabla u} : H_0^1(\Omega)^n \longrightarrow \mathbb{R} \\ \langle l_{\nabla u}, \bar{v} \rangle = \langle \nabla u, \bar{v} \rangle := - \int_\Omega u \operatorname{div} \bar{v}\, dx \\ \qquad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)^n \end{cases}$$

Para cada $u \in H^1(\Omega)$ fijo, se define $\nabla u \in (H_0^1(\Omega)^n)^*$

$$(H_0^1(\Omega)^n)^* := H^{-1}(\Omega)^n$$

Para cada $u \in H^1(\Omega)$, ∇u es un elemento de $H^{-1}(\Omega)^n$:

- linealidad es clara
- continuidad:

$$|\langle \nabla u, \bar{v} \rangle| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\bar{v}\|_{H^1(\Omega)}$$

La definición funciona si $u \in L^2(\Omega)$.

<u>Definición</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Si $u \in L^2(\Omega)$ se define

$$\nabla u \in H^{-1}(\Omega)^n = (H_0^1(\Omega)^n)^*$$

como:

$$\nabla : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)^n$$

(2) ...

$$\nabla u := \ell_{\nabla u}$$

$$\ell_{\nabla u}(\bar{v}) = \langle \nabla u, \bar{v} \rangle := -\int_\Omega u \operatorname{div} \bar{v} \, dx \quad \forall \bar{v} \in H_0^1(\Omega)^n$$

Lema 1 Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Entonces

$$L^2(\Omega) \subset\subset H^{-1}(\Omega).$$

Dem. Por Rellich, $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. Es decir, el operador inclusión,

$$i : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$
$$iu := u \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

es compacto. Pero el adjunto de un operador K compacto es compacto. (sección 1)

$$\therefore \quad i^* : L^2(\Omega)^* = L^2(\Omega) \longrightarrow \left(H_0^1(\Omega)\right)^* = H^{-1}(\Omega)$$
$$i^* u := u \qquad \forall u \in L^2(\Omega)$$

es compacto. Es decir, $L^2(\Omega) \subset\subset H^{-1}(\Omega)$

$\square$

Teorema Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Entonces el operador

$$\nabla : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)^n$$

tiene rango cerrado.

Dem. Sea $u_j \in L^2(\Omega)$ tal que $\nabla u_j \in H^{-1}(\Omega)^n$ es convergente en $H^{-1}(\Omega)^n$, es decir, $\exists\ \bar{v} \in H^{-1}(\Omega)^n$ tal que

$$\nabla u_j \to \bar{v} \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega)^n$$

esto es,

$$\sup_{\substack{\|\bar{w}\|_{H^1} \le 1 \\ \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n}} \left\{ \left| \langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle - \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \right| \right\}$$

$$= \sup_{\substack{\|\bar{w}\|_{H^1} \le 1 \\ \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n}} \left\{ \left| -\int_\Omega u_j \operatorname{div} \bar{w}\, dx - \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \right| \right\}$$

$$\longrightarrow 0 \quad \text{si} \quad j \to \infty.$$

Por demostrar: $\exists\ u \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\bar{v} = \nabla u \in H^{-1}(\Omega)^n$$

Paso 1: La sucesión es necesariamente acotada en $L^2(\Omega)$.

Por contradicción, si $u_j \in L^2(\Omega)$ no es acotada entonces existe una subsucesión $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ tal que $\|u_j\|_{L^2(\Omega)} \to \infty$ si $j \to \infty$.

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que $u_j \in (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp \subset L^2(\Omega)$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

(si $\exists\ u_j \in \ker \nabla$ entonces $0 = \nabla u_j \to \bar{v}$ en $H^{-1}(\Omega)^n \Rightarrow \bar{v} = 0.$)

Definimos $z_j := \dfrac{u_j}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}} \in (\ker \nabla)^\perp$

$$y \quad \|z_j\|_{L^2(\Omega)} \equiv 1 \quad \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

$$-\int_\Omega z_j \operatorname{div} \bar{w}\, dx = -\frac{1}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}} \int_\Omega u_j \operatorname{div} \bar{w}\, dx$$

$$= \frac{\langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}} \quad \forall\ \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

Dado que $\langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle \longrightarrow \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle \ \forall\ \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ (por hipótesis), entonces $|\langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle| \leq C$ uniformemente $\forall\ j \in \mathbb{N}$

$$\therefore \quad 0 \leq \left| -\int_\Omega z_j \operatorname{div} \bar{w}\, dx \right|$$

$$= |\langle \nabla z_j, \bar{w} \rangle| = \frac{|\langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle|}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}}$$

$$\leq \frac{C}{\|u_j\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow 0$$

$\forall\ \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ si $j \to \infty$

$\Rightarrow \quad \nabla z_j \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)^n$ si $j \to \infty$.

Pero $\|z_j\|_{L^2(\Omega)} \equiv 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Por precompacidad de la bola unitaria en el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, existe subsucesión $z_j \in (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$z_j \rightharpoonup z \in L^2(\Omega) \quad \text{ssi} \quad \langle z_j, \tilde{v} \rangle_{L^2(\Omega)} \to \langle z, \tilde{v} \rangle_{L^2}$$

$$\forall \tilde{v} \in L^2(\Omega)$$

y para cierto $z \in L^2(\Omega)$.

Por lo tanto,

$$\langle \nabla z_j, \bar{w} \rangle = -\langle z_j, \operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\downarrow$$

$$-\langle z, \operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla z, \bar{w} \rangle$$

$$\forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n,$$

si $j \to \infty$

Pero $\nabla z_j \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)$, por lo tanto concluimos que $\langle \nabla z, \bar{w} \rangle = 0$ $\forall \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ es decir

$$z \in \operatorname{Ker} \nabla \subset L^2(\Omega)$$

Sin embargo, $u_j \in (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp \Rightarrow z_j \in (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp$ subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$.

Por lo tanto, $z \in (\operatorname{Ker} \nabla) \cap (\operatorname{Ker} \nabla)^\perp = \{0\}$

$\therefore \quad z = 0 \in L^2(\Omega).$

Por otra parte, sabemos que $z_j \rightharpoonup 0$ en $L^2(\Omega)$, y $\|z_j\|_{L^2(\Omega)} \equiv 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}.$

Por la compacidad de la inclusión $L^2(\Omega) \subset\subset H^{-1}(\Omega)$ (lema 1) podemos extraer una subsucesión

$$z_j \in (\mathrm{Ker}\, \nabla)^{\perp} \subset L^2(\Omega)$$

tal que $\quad z_j \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)$

Entonces:
- $z_j \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)$
- $\nabla z_j \to 0$ en $H^{-1}(\Omega)^n$

Lema de Lions: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$ entonces

$$L^2(\Omega) = \{ u \in H^{-1}(\Omega) : D^{\alpha} u \in H^{-1}(\Omega), \ |\alpha| \leq 1 \}$$

Por lo tanto concluimos que

$$z_j \to 0 \quad \text{en } L^2(\Omega).$$

contradicción con $\|z_j\|_{L^2} \equiv 1 \quad \forall j.$

$\therefore \quad u_j$ debe ser acotada en $L^2(\Omega)$.

Paso 2: Dado que la sucesión $u_j \in (\mathrm{Ker}\, \nabla)^{\perp} \subset L^2(\Omega)$ y es acotada entonces, $\exists$ subsucesión u_j tal que

$$u_j \rightharpoonup u \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

Por ende,

$$\langle u_j, v \rangle_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

Si $\bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$ entonces $\operatorname{div} \bar{w} \in L^2(\Omega)$ y así

$$\langle \nabla u_j, \bar{w} \rangle = -\langle u_j, \operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\Big\downarrow \text{ conv. débil}$$

$$-\langle u, \operatorname{div} \bar{w} \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \nabla u, \bar{w} \rangle$$

$$\forall\, \bar{w} \in H_0^1(\Omega)^n$$

Es decir, $\nabla u_j \longrightarrow \nabla u$ en $H^{-1}(\Omega)^n$. Por unicidad del límite

$$\nabla u = \bar{v} \in H^{-1}(\Omega)^n$$

$\therefore \quad \nabla : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)^n$ tiene rango cerrado

$\square$

Problema de Stokes: fluido viscoso, incompresible; sea $\bar{u} = \bar{u}(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $n=2,3$, el campo de velocidades del fluido.

Condición de incompresibilidad es:

$$\operatorname{div} \bar{u} = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} u_j = 0 \qquad (1)$$

Suponemos densidad (de masa x unidad de volumen) constante: $\rho \equiv \rho_0 > 0$.

Ecuaciones de conservación de momento:

$$\rho_0 \big(\underbrace{\partial_t u_i + (\bar{u} \cdot \nabla) u_i}_{= \frac{Du_i}{Dt}} \big) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \sigma_{ij} + f_i \qquad \forall\ 1 \leq i \leq n$$

donde el tensor de esfuerzos es

$$\sigma_{ij} = - P \delta_i^j + 2\nu \varepsilon_{ij}(\bar{u}) \qquad 1 \leq i,j \leq n$$

P – presión, $\nu > 0$ constante de viscosidad

$$\varepsilon_{ij}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \left(\partial_{x_i} u_j + \partial_{x_j} u_i \right)$$

$p := \dfrac{P}{\rho_0}$ presión cinemática

$\mu := \dfrac{\nu}{\rho_0}$ viscosidad cinemática

$\bar{f}$ - campo de fuerzas externas.

Es fácil verificar que

$$\operatorname{div} \bar{u} = 0 \Rightarrow \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_j} \varepsilon_{ij}(\bar{u}) = \frac{1}{2} \Delta u_i \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$$

Obtenemos:

$$(2) \cdots \quad \partial_t u_i + (\bar{u} \cdot \nabla) u_i = \partial_{x_i} p + \mu \Delta u_i + f_i \qquad 1 \leq i \leq n$$

0

problema de Stokes:

- solución estacionaria
- se desprecian efectos no lineales

Sistema de Stokes:

$$(3) \cdots \begin{cases} \left.\begin{array}{l} -\mu \Delta \bar{u} + \nabla p = \bar{f} \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \end{array}\right\} \text{ en } \Omega \\ \bar{u} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$