Lección 4.2: Problemas de Dirichlet y de Neumann para el laplaciano.

Clase pasada:

Teorema (problema de Dirichlet homogéneo, $L=-\Delta$)
Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto. Sea $f \in L^2(\Omega)$ dado.
Entonces:
(a) Existe una única solución débil, $u \in H_0^1(\Omega)$, al prob. de Dirichlet que satisface

$$(1) \ldots \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

(b) Esta solución satisface:

$$(2) \ldots \begin{cases} -\Delta u - f = 0 & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \gamma_0(u) = 0 & \text{"sobre } \partial\Omega\text{"} \end{cases}$$

(c) Esta solución es el único mínimo de

$$(3) - \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \quad J[u] = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J[v] \\ J[v] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v \, dx \quad v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Proposición Si la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ de (1) es además regular, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ entonces es solución de

$$(4) \ldots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

u se llama solución clásica.
Inversamente, si $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es sol. de (4) entonces $u \in H^1(\Omega)$ es la solución débil de (1).

Problema de Dirichlet no homogéneo

Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ funciones conocidas. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Problema:

$$(1).- \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Recordamos que $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$, rango$(\gamma_0) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$. Vamos a suponer que:

- $f \in L^2(\Omega)$
- $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Definición Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Una solución débil de (1) es una función $u \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\cdot\ \gamma_0(u) = g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

y además:

$$(2).- \quad a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega).$$

observaciones: $g \in H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{rango}(\gamma_0)$

$\Rightarrow \exists\, w_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_g) = g$

w_g <u>no</u> necesariamente es única.

Definimos:

$$(3) \ldots \quad K := \{ v \in H^1(\Omega) : v - w_g \in H_0^1(\Omega) \}$$

<u>Lema</u> K es un subconjunto cerrado y convexo de $H^1(\Omega)$.

<u>Dem.</u> K se puede escribir como

$$K = w_g + H_0^1(\Omega)$$

K claramente es cerrado.

$\lambda \in (0,1)$, $u, v \in K$ entonces

$$\begin{aligned}(1-\lambda)u + \lambda v &= (1-\lambda)(\tilde{u} + w_g) + \lambda(\tilde{v} + w_g) \\ &= w_g + \underbrace{(1-\lambda)\tilde{u} + \lambda\tilde{v}}_{\in H_0^1(\Omega) \text{ si } \tilde{u}, \tilde{v} \in H_0^1(\Omega)} \\ &\in K.\end{aligned}$$

$\therefore$ $\square$

<u>Lema</u> Existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ al problema de Dirichlet no homogénea.

Dem. $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Selccionamos $w_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_g) = g$. $K := \{ v \in H^1(\Omega) : v - w_g \in H_0^1(\Omega) \}$

Sea $u = w_g + w \in H^1(\Omega)$ la solución débil buscada. Entonces :

$$\gamma_0(w) = \gamma_0(u - w_g) = \gamma_0(u) - \gamma_0(w_g)$$
$$= 0$$

$\therefore$ $w \in H_0^1(\Omega)$. Además

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= \underbrace{\int_\Omega \nabla w \cdot \nabla v \, dx}_{= a(w,v)} + \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx \\ &= \int_\Omega f v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad a(w,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - a(w_g, v)$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

El lado derecho es un elemento de $H^{-1}(\Omega)$ aplicado a v, si $w_g \in H^1(\Omega)$ fijo.

$$\tilde{f} \in H^{-1}(\Omega), \quad \langle \tilde{f}, v \rangle := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - a(w_g, v)$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

La linealidad es clara. La continuidad :

$$|\langle \tilde{f}, v\rangle| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|w_g\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$
$$\leq C_{f,g} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Además, $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica en $H_0^1(\Omega)$. Así, $a(\cdot,\cdot)$ define un prod. interno cuya topología inducida es equivalente a la topología de $\|\cdot\|_{H^1}$.

Por el teorema de Riesz: existe un único elemento $w \in H_0^1(\Omega)$ (único dado w_g) tal que

$$a(w,v) = \langle \tilde{f}, v\rangle = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} - a(w_g, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Concluimos la $\exists$ de $u = w_g + w \in H^1(\Omega)$ tal que

- $\gamma_0(u) = \underbrace{\gamma_0(w_g)}_{= g \in H^{1/2}(\partial\Omega)} + \underbrace{\gamma_0(w)}_{=0,\ w \in H_0^1(\Omega) = \ker \gamma_0}$

- $a(u,v) = a(w_g, v) + a(w,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$\therefore$ existe una solución débil $u \in H^1(\Omega)$.

Unicidad: sean $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ soluciones débiles. Entonces,

$\cdot\ \gamma_0(u_1 - u_2) = \gamma_0(u_1) - \gamma_0(u_2) = 0 \in H^{1/2}(\partial\Omega)$

$\therefore \quad u := u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega).$

$a(u_1, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} = a(u_2, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$\Rightarrow \int_\Omega \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = 0$$

$\forall v \in H_0^1(\Omega).$

Tomando $v = u \in H_0^1(\Omega)$: $\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 dx = 0.$

Por Poincaré:

$$0 \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

concluimos que $u = 0$ c.d.s. en Ω

$\therefore \quad u_1 = u_2$ c.d.s. en Ω

$\Rightarrow$ unicidad $\square$

Lema Si $u \in H^1(\Omega)$ es la solución débil de (2) entonces es solución de:

- $-\Delta u = f$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$
- $u = g$ en sentido de traza

Dem. $\gamma_0(u) = g$ por ser solución débil.

$\in H^{1/2}(\partial\Omega)$

Sea $\varphi \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Sustituyendo en (2):

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = a(u, \varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx$$

fórmula de Green en $H^1(\Omega)$

$$= -\int_\Omega u \, \Delta \varphi \, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u) \underbrace{\sum_{j=1}^n \gamma_0(\partial_{x_j} \varphi) \nu_j}_{=0, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \, dS_x$$

$$= -\langle u, \Delta \varphi \rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$= -\langle \Delta u, \varphi \rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad \langle f, \varphi \rangle = -\langle \Delta u, \varphi \rangle \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega)$$

$\square$

Teorema (problema de Dirichlet no homogéneo, $L = -\Delta$)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Sea $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, dados. Entonces:

(a) Existe una única solución débil al problema (1), es decir, $u \in H^1(\Omega)$ con $\gamma_0(u) = g$ y

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

(b) Esta solución débil satisface

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \gamma_0(u) = g & \text{en } H^{1/2}(\partial\Omega) \end{cases}$$

(c) Si definimos

$$(4) \ldots \quad K_g := \{ v \in H^1(\Omega) : \gamma_0(v) = g \in H^{1/2}(\partial\Omega) \}$$

entonces la solución débil $u \in H^1(\Omega)$ satisface la fórmula variacional

$$u \in K_g, \qquad J[u] = \min_{v \in K_g} J[v]$$

$$\text{con} \quad J[v] := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \cdots (5)$$
$$v \in H^1(\Omega)$$

Dem. (a) y (b) son consecuencia de los lemas anteriores.

(c): K_g se puede escribir de la forma (no única)

$$K_g = w_g + H_0^1(\Omega)$$

donde $w_g \in H^1(\Omega)$ es cualquier elemento tal que $\gamma_0(w_g) = g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. K_g es cerrado y convexo. Mas aún, podemos seleccionar $w_g = u$ (sol. débil), de modo que

$v \in K_g$ si y sólo si $v - u \in H_0^1(\Omega)$.

Entonces, si $v \in K_g$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
0 \leq a(v-u, v-u) &= \tfrac{1}{2}a(v,v) - a(u,v) + \tfrac{1}{2}a(u,u) \\
&= \tfrac{1}{2}a(v,v) - a(u, v-u+u) + \tfrac{1}{2}a(u,u) \\
&= \tfrac{1}{2}a(v,v) - a(u, \underbrace{v-u}_{\in H_0^1(\Omega) \text{ ssi } v \in K_g}) - \tfrac{1}{2}a(u,u) \\
&= \tfrac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v-u \rangle_{L^2(\Omega)} - \tfrac{1}{2}a(u,u) \\
&= J[v] - J[u]
\end{aligned}
$$

a simétrica

$$\Rightarrow \quad J[u] \geq J[v] \quad \forall\, v \in K_g$$

Además, $u \in K_g$ $\therefore$ $u \in K_g$ minimiza $J[\cdot]$ en K_g

$\square$

Conexión con el problema de Dirichlet homogéneo:

Sea $w_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_g) = g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$
Definimos $w = u - w_g \in H_0^1(\Omega)$. El problema se puede formular en el espacio $H_0^1(\Omega)$:

$$
(6) \text{ -- } \begin{cases} -\Delta w = f + \Delta w_g & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}
$$

Notamos que $w_g \in H^1(\Omega) \Rightarrow \Delta w_g \in H^{-1}(\Omega)$
(ejercicio)

Podemos definir:

$$\langle \tilde{f}, v \rangle := \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx$$
$$\forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\therefore \quad \tilde{f} = f + \Delta w_g \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Teorema Bajo mismas hipótesis. Sea $w_g \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(w_g) = g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Entonces:

(a) Existe una única solución $w \in H_0^1(\Omega)$ al problema

$$(7) \cdots \begin{cases} a(w,v) = \langle \tilde{f}, v \rangle = \langle f, v \rangle_{L^2} - \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx \\ \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \\ w \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

(b) Esta solución $w \in H_0^1(\Omega)$ es solución de

- $-\Delta w = f + \Delta w_g$ en $H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$
- $\gamma_0(w) = 0$

Dem. (a) claramente

$$\begin{cases} v \mapsto \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx \\ v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

es un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.

Además: $a(\cdot,\cdot)$ es un prod. interno en $H_0^1(\Omega)$, misma topología.

Por el teo. de Riesz: $\exists!\ w \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(w,v) = \langle f, v \rangle_{L^2} - \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx$$

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

(b) Ejercicio. (Mismos argumentos) $\square$

Corolario $w + w_g \in H^1(\Omega)$ es la solución débil al problema no homogéneo (2).

Dem. Claramente, $\hat{u} := w + w_g \in H^1(\Omega)$ es solución de:

- $$\gamma_0(\hat{u}) = \gamma_0(w + w_g) = \underbrace{\gamma_0(w)}_{=0,\ w \in H_0^1(\Omega)} + \underbrace{\gamma_0(w_g)}_{=g \in H^{1/2}(\partial\Omega)}$$
$$= g$$

-

- $a(\tilde{u}, v) = a(w + w_g, v)$
$$= a(w, v) + a(w_g, v)$$
$$= \underbrace{\langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega \nabla w_g \cdot \nabla v \, dx + a(w_g, v)}_{=0}$$
$$= \langle f, v \rangle_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Por unicidad de la solución débil $u = \tilde{u} \in H^1(\Omega)$. $\square$

<u>Nota</u>: Desde el punto de vista práctico (numérico) muchas veces es más fácil trabajar con $w = u - w_g$ y resolver el problema homogéneo para w en $H_0^1(\Omega)$.

El problema de Neumann para $L = -\Delta$.

Problema de Neumann, homogéneo, coercivo:

$$(1) \cdots \begin{cases} -\Delta u + \alpha(x) u = f & \text{en } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

donde $\alpha \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0 \quad \forall x \in \bar{\Omega}$
y $f : \Omega \to \mathbb{R}$ conocida. Homogéneo se refiere a $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \hat{\nu} = 0$, $\hat{\nu}$ - vector normal unitario ext. sobre $\partial\Omega$

y coercivo se refiere a que el problema (1) está bien planteado: su forma bilineal es coerciva (o H^1-elíptica) gracias a $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$.

Supongamos que $f \in C(\bar{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ y que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ es solución clásica de (L). Entonces multiplicamos por

$$\varphi \in C^\infty(\Omega)$$

e integramos en Ω:

$$-\int_\Omega \varphi \Delta u \, dx + \int_\Omega \alpha(x) \varphi u \, dx = \int_\Omega f \varphi \, dx$$

Como $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ y φ es suave:

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u \, dx \underbrace{- \int_{\partial\Omega} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS_x} + \int_\Omega \alpha(x) \varphi u \, dx$$

$$= \int_\Omega \varphi f \, dx$$

Requerimos $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega$ (u es sol. clásica por hipótesis) y no estamos suponiendo que $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$. Formulamos el problema variacional:

$$(2)\ldots\begin{cases} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) := \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \alpha_0(x) u v \, dx \\ \qquad = \displaystyle\int_\Omega f v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \\ \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Definición $u \in H^1(\Omega)$ es solución débil al problema de Neumann homogéneo y coercivo (1) si u es solución de (2).

Observaciones: Nótese que

- el espacio "natural" para resolver el problema de Neumann es $H^1(\Omega)$: la condición de frontera está codificada en la formulación débil.
- en la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ no requerimos $u \in H^2(\Omega)$, (para definir $\gamma_1(u) = \partial u/\partial \nu$ si $u \in H^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$).

Lema Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto acotado. Entonces $\forall$ $\alpha \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ $\forall x \in \bar{\Omega}$ y toda $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H^1(\Omega)$ de (2).

Dem. Por definición, $a(\cdot,\cdot)$ es una forma bilineal y simétrica.

Además, $a(\cdot,\cdot)$ induce una norma equivalente a $\|\cdot\|_{H^1}$:

$$a(u,u) = \|Du\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\sqrt{\alpha(x)}\, u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq (1+C_0)\|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

donde $C_0 = \max_{x\in\bar{\Omega}} \alpha(x) > 0$, $\bar{\Omega}$ compacto.

$$a(u,u) \geq C_1 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}$$

con $C_1 = \min\{1, \alpha_0\} > 0$

$\therefore$ $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno equivalente $\langle , \rangle_{H^1(\Omega)}$.

como $f\in L^2(\Omega)$ define un funcional lineal en $H^1(\Omega)$;

$$\langle f, v\rangle := \int_\Omega f v \, dx = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)}$$

por el teo. de Riesz $\exists!$ $u\in H^1(\Omega)$ tal que:

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v\in H^1(\Omega)$$

$\square$

<u>Observación</u>: Definimos el espacio de funciones

$$(3) \cdots \quad \mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{ \varphi|_{\Omega} : \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \}$$

$\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es la restricción en Ω de una función de prueba, $\tilde{\varphi}|_{\Omega} = \varphi$, $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nótese qué $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \subsetneq \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Se puede demostrar:

<u>Lema</u> $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es un subespacio denso de $H^1(\Omega)$, $\forall \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado.

<u>Dem.</u> Ejercicio (ver la demostración de $C_+^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$.) $\square$

<u>Lema</u> Supongamos que la solución débil de (2) satisface $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$. Entonces es solución clásica al problema de Neumann (1). [Suponiendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.]

<u>Dem.</u> Sea $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ la sol. débil. Tomemos $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$. Entonces

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \alpha(x) u v \, dx$$

$$= \langle f, v \rangle_{L^2}$$

Integrando por partes ($u \in C^2(\bar{\Omega})$ y $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$):

$$(4) \dots \int_\Omega (-\Delta u + \alpha(x)u - f)\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_x = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

En particular, para $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\bar{\Omega})$:

$$\int_\Omega \underbrace{(-\Delta u + \alpha(x)u - f)}_{\in L^2(\Omega)}\, v\, dx = 0 \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

Por el teorema de localización concluimos que

$$(5) \dots \quad -\Delta u + \alpha(x)u - f = 0 \quad \text{c.d.s. en } \Omega$$

Sustituyendo en (4) y con $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$

$$\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu}\, dS_x = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$$

<u>Lema auxiliar</u> Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto acotado $\partial\Omega \in C^1$. Entonces para cualquier función $h \in L^2(\partial\Omega)$ se tiene que

$$\int_{\partial\Omega} h v\, dS_x = 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \Rightarrow h = 0 \text{ c.d.s. en } \partial\Omega.$$

Por el lema auxiliar $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ c.d.s. en $\partial\Omega$

$\square$

Dem. lema auxiliar : Por densidad de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ y por continuidad de $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ entonces la propiedad se puede extender a todo H^1:

$$\int_{\partial\Omega} h\, \gamma_0(v)\, dS_x = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

$$\text{rango}(\gamma_0) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega).$$

Entonces,

$$\int_{\partial\Omega} h w \, dS_x = 0 \quad \forall w \in H^{1/2}(\partial\Omega)$$

$H^{1/2}(\partial\Omega)$ es denso en $L^2(\partial\Omega)$.
($H^{1/2}(\mathbb{R}^{n-1})$ es denso en $L^2(\mathbb{R}^{n-1})$; se toman coordenadas locales, $\partial\Omega$ es localmente plana).

$$\therefore \quad \|h\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \quad \therefore \quad h = 0$$

c.d.s. en $\partial\Omega$.

Observaciones

(a) Los problemas de Dirichlet y Neumann son fundamentalmente diferentes. En el caso de Dirichlet la condición de frontera debe establecerse a priori ($u=0$ ó $u=g$) en el espacio de funciones donde se quiere demostrar existencia. En cambio, en el problema de Neumann no se impone a priori la condición de frontera. Esta ocurre naturalmente, está codificada en el problema variacional.

(b) Las condiciones de frontera (como las de Dirichlet) que deben imponerse en la formulación variacional se denominan esenciales.

Las condiciones tipo Neumann, que ocurren automáticamente, se denominan naturales.

Teorema (problema de Neumann, homogéneo, coercivo para $L=-\Delta$)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto acotado. Sea $f \in L^2(\Omega)$ y $\alpha(x) \in C(\bar{\Omega})$, $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0$ $\forall\, x \in \bar{\Omega}$. Entonces:

(a) Existe una única solución débil de

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ a(u,v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

con $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \alpha(x) u v \, dx$

(b) Esta solución es el único mínimo en $H^1(\Omega)$ del problema:

$$u \in H^1(\Omega), \quad \min_{w \in H^1(\Omega)} J[w] = J[u]$$

con

$$J[w] := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla w|^2 + \alpha(x) w^2 \, dx - \int_\Omega f w \, dx$$

(c) Si además suponemos que $\partial\Omega \in C^1$ y $u \in C^2(\bar{\Omega})$ entonces u es solución clásica del problema de Neumann (1)

(d) Inversamente, toda solución clásica $u \in C^2(\bar{\Omega})$ de (1) coincide con la solución débil $u \in H^1(\Omega)$.

Dem. (a) y (c) son consecuencia de los lemas anteriores.

Faltan (b) y (d) (próxima clase) $\square$