Lección 3.10: Aplicaciones de Rellich-Kondrachov.

Teorema de Rellich-Kondrachov: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$. Si $1 \leq p < n$ entonces $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall\ 1 \leq q < p^* = np/(n-p)$.

Corolario 1: $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$. (El caso $p > n$ se demuestra con Morrey.)

Corolario 2: $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, $\forall\ 1 \leq p < \infty$ (incluso si $\partial\Omega \notin C^1$).

Notas: (a) Si el dominio no es acotado no hay inclusión compacta en general.
(b) Si $1 \leq p < n$ la inclusión $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ no es compacta.

Teorema (Rellich-Kondrachov, parte 2)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Entonces:

(a) Si $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall\ 1 \leq q < \infty$

(b) Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset C(\bar{\Omega})$.

Dem. (a) Sabemos que en el caso $1 \leq p < n$ $W^{1,p} \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall\ q \in [1, p^*)$. Notamos que si $p \to n^-$ entonces $p^* = \dfrac{np}{n-p} \to \infty$.

Como Ω es acotado, entonces

$$W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,n-\epsilon}(\Omega) \quad \forall\ \epsilon > 0 \text{ tal que } n - \epsilon > 0.$$

En efecto, para cualquier multi-índice $|\alpha|\leq 1$, $u\in W^{1,n}(\Omega)$, sea $v = \begin{cases} u \\ D^\alpha u \end{cases}$; así:

$$\|v\|^{n-\epsilon}_{L^{n-\epsilon}(\Omega)} = \int_\Omega |v|^{n-\epsilon}\,dx$$

Hölder
$\tilde{p} = \frac{n}{n-\epsilon} > 1$
$\tilde{q} = \frac{n}{\epsilon} > 1$
$\tilde{p}^{-1} + \tilde{q}^{-1} = 1$

$$\leq \left(\int_\Omega |v|^{(n-\epsilon)\tilde{p}}\,dx\right)^{1/\tilde{p}} \left(\int_\Omega dx\right)^{1/\tilde{q}}$$

$$= |\Omega|^{\epsilon/n}\left(\int_\Omega |v|^n\,dx\right)^{(n-\epsilon)/n}$$

$$= |\Omega|^{\epsilon/n}\,\|v\|^{n-\epsilon}_{L^n(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \|v\|_{L^{n-\epsilon}(\Omega)} \leq C(\Omega,n,\epsilon)\,\|v\|_{L^n(\Omega)} \quad \cdots (*)$$

Tomando $v = Du$, $\|Du\|_{L^{n-\epsilon}} \leq C\,\|Du\|_{L^n(\Omega)} \quad \cdots (**)$

$\therefore \quad W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,n-\epsilon}(\Omega)$ si $n-\epsilon > 0$

Ahora: $\forall\ 1\leq q<\infty$ podemos hallar

$$0<\epsilon<\frac{n^2}{n+q}$$

tal que

$$1\leq q < (n-\epsilon)^* = \frac{n(n-\epsilon)}{n-(n-\epsilon)} = \frac{n(n-\epsilon)}{\epsilon}$$

Aplicando Rellich-Kondrachov (RK) con $\bar{p} := n-\epsilon < n$.

$$W^{1,\bar{p}}(\Omega) = W^{1,n-\epsilon}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$$

$\forall\ 1 \leq q < \infty$ ya que $q \in [1, \bar{p}^*)$ para ese $\epsilon > 0$.

Así, $$\underbrace{W^{1,n}(\Omega) \subset W^{1,n-\epsilon}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)}_{\subset\subset}$$

ya que: si una sucesión es acotada en $W^{1,n}(\Omega)$ por (*) y (**), también es acotada en $W^{1,n-\epsilon}(\Omega)$.

Por compacidad $\exists$ subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$.

(b) Si $p > n$ entonces por el teo. de encaje de Sobolev
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})$$

Sea B la bola unitaria en $W^{1,p}(\Omega)$:
$$B = \{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq 1 \}$$

Entonces:

- $B \subset W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$

- $\|u\|_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \underset{u \in B}{\leq} C$

$\Rightarrow \|u\|_{C(\bar{\Omega})} + [u]_{C^{0,1-n/p}(\bar{\Omega})} \leq C \quad \forall\, u \in B$

Esto implica que:

$$|u(x) - u(y)| \leq C\,|x-y|^{1-n/p} \qquad \forall\, u \in B$$

uniformemente en $x, y \in \overline{\Omega}$.

Es decir, las funciones en B son una familia unif. acotada y equicontinua en $C(\overline{\Omega})$. Por Arzelá-Ascoli, B es relativamente compacta en $C(\overline{\Omega})$. $\square$

<u>Corolario</u> (teorema de Rellich)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$, entonces

$$H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \qquad \cdots \quad (1)$$

<u>Dem.</u> Por RK con $p<2$ y $1 \leq q := 2 < 2^*$ $\square$

Mediante iteración se puede demostrar:

<u>Teorema</u> $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^k$, $k \geq 1$. Entonces:

(a) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} > 0$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$ $\forall\, q \in \left[p, \frac{np}{n-kp}\right)$.

(b) Si $\frac{1}{p} - \frac{k}{n} < 0$ entonces $W^{k,p}(\Omega) \subset\subset C^{k-\left[\frac{n}{p}\right]-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ con $\gamma \in (0,1)$ si $\frac{n}{p} \in \mathbb{Z}_+$ ó $\gamma = \left[\frac{n}{p}\right] + 1 - \frac{n}{p}$ si $\frac{n}{p} \notin \mathbb{Z}$.

Ref.: • Edmunds, Evans "Spectral theory..." CUP.
• Adams, "Sobolev spaces".

Teorema Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, acotado, abierto; $1 \leq p < \infty$ y sean $k, \ell \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que

$$\ell > k$$

Entonces:

(a) $W_0^{\ell,p}(\Omega) \subset\subset W_0^{k,p}(\Omega)$

(b) si además $\partial\Omega \in C^1$ entonces $W^{\ell,p}(\Omega) \subset\subset W^{k,p}(\Omega)$.

Dem. Primero observamos que:

(i) $W_0^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$
(ii) $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$ si $\partial\Omega \in C^1$

(ver corolarios 1 y 2).

Por inducción sobre $\ell > k \geq 0$.

(1) El caso $\ell = 1$ es cierto: $\ell = 1 > k = 0$ por (i) y (ii)

(2) Hipótesis de inducción: para $\ell > k$ y $k \geq 0$, $W^{\ell,p} \subset\subset W^{k,p}$

Sea $u_m \in W^{l+1,p}$, acotada, $m \in \mathbb{N}$.

Entonces, dado que $W^{l+1,p} \hookrightarrow W^{l,p}$ claramente u_m es acotada en $W^{l,p}$. Así, $\forall |\alpha| \leq l$ $D^\alpha u_m$ es acotada en $W^{1,p} \subset\subset L^p$.

$\therefore$ $\exists$ subsucesión $D^\alpha u_m$ convergente en L^p $\forall |\alpha| \leq l$ $\therefore$ u_m convergente en $W^{l,p}$

concluimos que u_m acotada en $W^{l+1,p}$ tiene subsucesión convergente en $W^{l,p}$. Cierto para $l+1$.

Conclusión: (a) caso gral.
(b) $\partial\Omega \in C^1$ $\square$

Corolario

(a) $H_0^k(\Omega) \subset\subset H_0^{k-1}(\Omega) \subset\subset \cdots \subset\subset H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ $\forall k \geq 1$

(b) Con $\partial\Omega \in C^1$:

$$H^k(\Omega) \subset\subset H^{k-1}(\Omega) \subset\subset \cdots \subset\subset H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \quad \forall k \geq 1.$$

Aplicaciones de RK

Lema 1 (desigualdad de Poincaré, versión 3)
$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$.
Entonces $\exists$ $C = C(n, \Omega) > 0$ tal que

(2) ... $$\|u\|^2_{H^k(\Omega)} \leq C\left[\sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k}\left(\int_\Omega D^\alpha u\,dx\right)^2\right]$$

$\forall\ u \in H^k(\Omega),\ k \geq 1.$

Caso particular : $k=1$

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left[\int_\Omega |Du|^2 dx + \left(\int_\Omega u\,dx\right)^2\right]$$

$\forall\ u \in H^1(\Omega).$

<u>Dem.</u> Es suficiente demostrar (2) para el caso $\|u\|_{H^k(\Omega)} = 1$. En efecto, en el caso general $v \in H^k(\Omega)$, $\|v\|_{H^k(\Omega)} \neq 0$ definimos

$$u := \frac{v}{\|v\|_{H^k(\Omega)}}$$

$$\Rightarrow \|u\|^2_{H^k(\Omega)} = 1 \leq C\left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k}\left(\int_\Omega D^\alpha u\,dx\right)^2\right)$$

El lado derecho es homogénea de orden 2:

$$\|D^\alpha u\|_{L^2} = \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx = \frac{1}{\|v\|^2_{H^k}} \int_\Omega |D^\alpha v|^2 dx$$

$$\left(\int_\Omega D^\alpha u\,dx\right)^2 = \frac{1}{\|v\|^2_{H^k}}\left(\int_\Omega D^\alpha v\,dx\right)^2$$

Así, obtenemos (2) para $v \in H^k(\Omega)$.

Por contradicción: $\forall\, j \in \mathbb{N}\ \exists\ u_j \in H^k(\Omega)$ con $\|u_j\|_{H^k(\Omega)} = 1$ tal que

$$1 > j\left[\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha|<k}\left(\int_\Omega D^\alpha u_j\, dx\right)^2\right]$$

Por Rellich: $H^k(\Omega) \subset\subset H^{k-1}(\Omega) \underset{TF}{\Rightarrow}$ existe subsucesión u_j convergente en $H^{k-1}(\Omega)$.

Así,

$$0 \leftarrow \frac{1}{j} > \sum_{|\alpha|<k}\left(\int_\Omega D^\alpha u_j\, dx\right)^2 \qquad \text{si } j \to \infty$$

$$0 \leftarrow \frac{1}{j} > \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u_j\|^2_{L^2(\Omega)}$$

Concluimos que el límite

$$H^{k-1}(\Omega) \ni u := \lim_{j\to\infty} u_j \quad \text{en } H^{k-1}(\Omega)$$

es una versión c.d.s. de un polinomio de orden $\leq k$

Además, $\|u\|_{H^k(\Omega)} = 1$ ya que $\|u_j\|_{H^k(\Omega)} = 1 \ \forall j$.

$\therefore$ concluimos que

$$H^k(\Omega) \ni u = \lim_{j\to\infty} u_j \quad \text{en } H^k(\Omega)$$

i.e. $\|u - u_j\|_{H^k(\Omega)} \to 0$ si $j \to \infty$.

Por otro lado, $\int_\Omega D^\alpha u_j \, dx \to 0$ si $j \to \infty$

$\forall |\alpha| \leq k-1$

como $u_j \to u$ en $H^k(\Omega)$ $\Rightarrow$ $\exists$ subsucesión u_j tal que

$D^\alpha u_j \longrightarrow D^\alpha u$ c.d.s.

$\forall |\alpha| \leq k-1$

(ya que conv. en L^p $\Rightarrow$ conv. c.d.s.)

Aplicamos convergencia dominada:

$$|D^\alpha u_j| \leq |D^\alpha u_j - D^\alpha u| + |D^\alpha u|$$

$$\leq C\,|D^\alpha u| \quad \text{para } j \gg 1$$

suficientemente grande

ya que $D^\alpha u_j \to D^\alpha u$ c.d.s.
si $j \to \infty$

y $$\int_\Omega |D^\alpha u| \, dx \leq \left(\int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega dx\right)^{1/2}$$

$$\leq |\Omega|^{1/2} \, \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} < \infty$$

$\forall |\alpha| \leq k-1$

ya que $u \in H^k(\Omega)$.

Entonces:

conv. dominada

$$0 = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega D^\alpha u_j \, dx \overset{\downarrow}{=} \int_\Omega \lim_{j\to\infty} D^\alpha u_j \, dx$$

$$= \int_\Omega D^\alpha u \, dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega D^\alpha u \, dx = 0 \quad \forall \ |\alpha| \leq k-1$$

Tomando $|\alpha| = k-1$ y dado que $D^\beta u = 0$ c.d.s. $\forall \ |\beta| \geq k$, concluimos que u es una versión c.d.s. de un polinomio de orden $\leq k-1$

Así, $D^\alpha u$ con $|\alpha| = k-1$ es el coeficiente a_{k-1} de un monomio de la forma $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ con $|\alpha| = k-1$.

$$\Rightarrow \int_\Omega D^\alpha u \, dx = |\Omega| \, a_{k-1} = 0$$

$\therefore$ u es una versión c.d.s. de un polinomio de orden $k-2$. Es decir, $D^\beta u = 0$ c.d.s. $\forall \ |\beta| \geq k-1$.

Sucesivamente, tomando $|\alpha| = k-2$

$|\alpha| = k-3$

$\vdots$

obtenemos que $u \equiv 0$ c.d.s. en Ω. Contradicción con $\|u\|_{H^k(\Omega)} = 1$.

$\square$

Lema 2 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo, con $\partial\Omega \in C^1$. Entonces $\exists$ $C = C(n,\Omega) > 0$ tal que

$$(3)\ldots \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C\left[\|Du\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma |\gamma_0 u|^2 \, dS_x\right]$$

donde $\Gamma \subseteq \partial\Omega$, porción de la frontera con superficie positiva $|\Gamma| = \int_\Gamma dS_x > 0$

y $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.

Dem. Por un argumento similar, basta demostrar (3) para $\|u\|_{H^1(\Omega)} = 1$.

Por contradicción: suponemos $\exists$ $u_j \in H^1(\Omega)$ con $\|u_j\|_{H^1(\Omega)} = 1$ tal que

$$(4)\ldots \quad 1 > j\left[\|Du_j\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Gamma |\gamma_0 u_j|^2 \, dS_x\right] \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

Rellich: $H^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ $\therefore$ $\exists$ subsucesión u_j tal que $u_j \to u$ en $L^2(\Omega)$.

$$(4) \Rightarrow \quad \frac{1}{j} > \|Du_j\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad \text{si } j \to \infty$$

$$\frac{1}{j} > \int_\Gamma |\gamma_0 u_j|^2 \, dS_x \longrightarrow 0 \quad \text{"}$$

Lema auxiliar: $\{u_j\} \subset H^k(\Omega)$ con $\|u_j\|_{H^k} = 1$ $\forall j$ y $u_j \to u$ en $H^{k-1}(\Omega)$ $\Rightarrow$ $u \in H^k(\Omega)$ y $\|u\|_{H^k(\Omega)} = 1$.

Dem. Ejercicio (precompacidad de la bola en $H^k(\Omega)$ y unicidad del límite débil) $\square$

$$\left.\begin{array}{l} \|u_j\|_{H^1(\Omega)} = 1 \\ u_j \in H^1(\Omega) \\ u_j \to u \text{ en } L^2(\Omega) \end{array}\right\} \overset{\text{lema aux.}}{\Rightarrow} \quad \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega) \\ \|u\|_{H^1(\Omega)} = 1. \end{array}$$

$$\therefore \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\|Du_j\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow \|Du\|_{L^2(\Omega)}$$

$j \to \infty$

conclusión $\|Du\|_{L^2(\Omega)} = 0$

$\therefore$ u es constante c.d.s. en Ω.

Como Ω es conexo, $\|u\|_{H^1} = 1$ entonces $u \equiv a_0$ c.d.s. en Ω con $a_0 > 0$.

Notamos $a_0 = u \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Por el teorema de traza

$$\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega} = a_0 > 0$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma |\gamma_0 u|^2 \, dS_x = a_0 |\Gamma| > 0.$$

Pero, $\int_\Gamma |\gamma_0 u_j|^2 \, dS_x \to 0$ si $j \to \infty$

Por continuidad de la traza esto implica que

$$\int_\Gamma |\gamma_0 u|^2 \, dx = 0 \quad \text{contradicción}$$

$\square$

Recordatorio: $\partial\Omega \in C^1$, $1 \leq p \infty$

$\exists$ operador acotado, continuo

$$\begin{cases} \gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega) \\ \|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \end{cases}$$

tal que $\gamma_0 u = u|_{\partial\Omega}$ si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

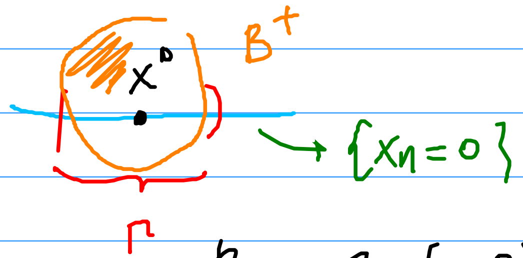
Proposición con las hipótesis del teorema de traza:

$$\|\gamma_0 u\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq C \, \|u\|^{p-1}_{L^p(\Omega)} \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \ldots (5)$$

$\forall \; u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $C = C(\Omega, n, p) > 0$.

Dem: Por un argumento similar, dado que $\partial\Omega \in C^1$ basta con demostrarlo para un pedazo de hiperplano.

Sea $x^0 \in \partial\Omega$, localmente plana: $\{x_n = 0\} \subset \partial\Omega$



$$\Gamma = \partial\Omega \cap B_{\frac{r}{2}}(x^0)$$

Sean $B = B_r(x^0)$, $r>0$, $\hat{B} = B_{\frac{r}{2}}(x^0)$ y $\varphi \in C_0^\infty(B)$ tal que $\varphi \geq 0$ en B y $\varphi \equiv 1$ en $\hat{B}$. Sea $B^+ := \Omega \cap B$.

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$\int_\Gamma |u|^p \, d\tilde{x} \leq -\int_{B^+} \partial_{x_n}(\varphi |u|^p)\, dx$$

Mismo argumento:

$$\partial_{x_n}(\varphi |u|^p) = \partial_{x_n}\varphi\, |u|^p + p|u|^{p-1}\varphi (\operatorname{sgn} u)\, \partial_{x_n} u$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma |u|^p \, d\tilde{x} \leq \int_{B^+} |u|^{p-1}\left[|\partial_{x_n}\varphi||u| + p|\varphi||\partial_{x_n} u|\right] dx$$

Hölder $\frac{1}{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} = 1$

$$\leq C\left(\int_{B^+} |u|^{(p-1)\tilde{p}}\, dx\right)^{1/\tilde{p}} \cdot \left(\int_{B^+} (|u| + |Du|)^{\tilde{q}}\, dx\right)^{1/\tilde{q}}$$

$$(a+b)^{\tilde{q}} \leq 2^{\tilde{q}-1}(a^{\tilde{q}} + b^{\tilde{q}}) \quad \forall\, a,b>0$$

Tomando $\tilde{q} = p$ obtenemos $\tilde{p}(p-1) = p$ y

$$\int_{\Gamma} |u|^p \, d\tilde{x} \leq C\left(\int_{B^+} |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B^+} |u|^p + |Du|^p\right)^{1/p}$$

$$\leq C \, \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Concluimos que

$$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C \, \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \square$$

Teorema (compacidad de la traza)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$ y sea $1 < p < \infty$. Entonces el operador de traza $\gamma_0 : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\partial\Omega)$ es compacto.

Dem. Sea $\epsilon > 0$. Por la desigualdad de Young

$$ab \leq \frac{1}{\tilde{p}} a^{\tilde{p}} + \frac{1}{\tilde{q}} b^{\tilde{q}}$$

el op. de traza satisface

$$\|\gamma_0 u\|_{L^p(\partial\Omega)}^p \leq C \, \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

$$\overset{(5)}{=} C\left(\epsilon \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)\left(\frac{1}{\epsilon} \|u\|_{L^p(\Omega)}^{p-1}\right)$$

Young

$$\leq \frac{C}{\tilde{p}} \left(\epsilon \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}\right)^{\tilde{p}} + \frac{C}{\tilde{q}} \frac{\|u\|_{L^p(\Omega)}^{(p-1)\tilde{q}}}{\epsilon^{\tilde{q}}}$$

Tomando $\tilde{p} = p > 1 \Rightarrow \infty > \tilde{q} = \frac{p}{p-1} > 0$

y

$$\|\gamma_0 u\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq \bar{C}\epsilon^p + \frac{\bar{C}}{\epsilon^{p/(p-1)}} \|u\|^p_{L^p(\Omega)}$$

RK $\Rightarrow$ $W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^p(\Omega)$, $\forall$ suc. acotada $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$ $\exists$ subsucesión u_j tal que $u_j \to u$ en $L^p(\Omega)$.

Por linealidad de la traza:

$$\|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)} = \|\gamma_0(u_j - u_k)\|^p_{L^p(\partial\Omega)}$$

$$\leq \bar{C}\epsilon^p \|u_j - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \frac{\bar{C}}{\epsilon^{p/(p-1)}} \|u_j - u_k\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$$\leq C\epsilon^p + \frac{C}{\epsilon^{p/(p-1)}} \|u_j - u_k\|^p_{L^p(\Omega)}$$

$\|u_j\|_{W^{k,p}} \leq C$

Como $u_j \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\forall \epsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\epsilon, C, p) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_j - u_k\|^p_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2C}\epsilon^{1+\frac{p}{p-1}}$$

si $j, k \geq N$.

$$\Rightarrow \|\gamma_0 u_j - \gamma_0 u_k\|^p_{L^p(\partial\Omega)} \leq C_1\epsilon^p + \frac{1}{2}\epsilon$$

$\forall\ \varepsilon > 0$ y $j, k \gg 1$.

$\therefore$ $\{u_j\}$ es de Cauchy en $L^p(\partial\Omega)$ completo.

$\therefore$ $\{u_j\}$ converge en $L^p(\partial\Omega)$

$\square$