Lección 2.1: Teoría de distribuciones. Definición y propiedades básicas.

Sección 2 Teoría de distribuciones

2.1 Definición y propiedades básicas

Refs. • L. Schwartz (1966), Hermann Press
• R. Strichartz (1993), CRC Press

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un dominio abierto (puede ser $\Omega = \mathbb{R}^n$) sea $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. El soporte de φ se define como

$$\operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\Omega \cap \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}$$

Nota: Si φ es continua esta definición coincide con la de soporte esencial:

$\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ medible

$N = \bigcup \mathcal{O}$, unión de conjuntos abiertos $\mathcal{O}$ donde $\varphi = 0$ c.d.s.

$\Rightarrow$ ess $\operatorname{supp}(\varphi) = \Omega \setminus N$

Definición $\mathcal{D}(\Omega) := C_0^\infty(\Omega)$ es el conjunto de funciones de prueba: $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ssi $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $\operatorname{supp}(\varphi) \subset\subset \Omega$.

Notación: si $\Omega = \mathbb{R}^n$ entonces $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo: alisador de Friedrics

$$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$$

con $C>0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x)\,dx = 1$.

$\eta \in C_0^\infty(B_1(0)) = \mathcal{D}(B_1(0))$.

Alisador: $\forall \epsilon>0$ $\quad \eta_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon^n}\eta(x/\epsilon)$

$\in C_0^\infty(B_\epsilon(0))$.

Definición una distribución l, es un elemento del dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, es un funcional lineal continuo $l : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$; aquí la continuidad significa:

$l(\varphi_n) \to l(\varphi)$ si $n\to\infty$ siempre que

(a) $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$, K compacto $\forall\, n\in\mathbb{N}$
$K \subset\subset \Omega$

(b) $\forall$ multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}^+\cup\{0\}$
con $D^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$ se tiene que

$$D^\alpha \varphi_n \to D^\alpha\varphi \quad \text{si } n\to\infty$$

uniformemente en K.

Si (a) y (b) se cumplen se denota $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$, $n\to\infty$

$\mathcal{D}(\Omega)^* = \mathcal{D}'(\Omega)$ notación estándar

El espacio de distribuciones se denota como $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Nota: esta definición de continuidad es equivalente a la siguiente definición (en apariencia más restringida):

Definición $\forall\ K \subset\subset \Omega$, K compacto, existen $N(K) \in \mathbb{N}$ y $C = C(K) > 0$ constante tales que, para cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ se tiene que:

$$|\ell(\varphi)| \leq C(K)\, \|\varphi\|_N \qquad \cdots (1)$$

donde $\|\varphi\|_N := \max\limits_{\substack{|\alpha| \leq N \\ x \in K}} |D^\alpha \varphi(x)|$.

(definición de continuidad de ℓ)

Lema $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (continuo) si y sólo si ℓ continuo en sentido de (1).

Dem: "$\Leftarrow$" Suponiendo (1). Si $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$, por linealidad de ℓ

$$|\ell(\varphi_n) - \ell(\varphi)| = |\ell(\varphi_n - \varphi)| \leq C(K) \|\varphi_n - \varphi\|_N \to 0$$

si $n \geq N$ $(n \to \infty)$ por (a) y (b).

"$\Rightarrow$" Por contradicción: sea $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ continuo, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ y que (1) es falsa:
$\forall C > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$ y cierto K, $\ell(\varphi) > C \|\varphi\|_N$

Esto implica que, $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_N \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\operatorname{supp}(\varphi_N) \subset K$ tal que

- $\ell(\varphi_N) = 1$
- $\|\varphi_N\|_N < \frac{1}{N}$

Claramente $\varphi_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ si $N \to \infty$. Pero ℓ es continuo $\therefore$ $\ell(\varphi_N) \to 0$ $N \to \infty$ contradicción

$\square$

Observación: sea $v \in C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$, fijo.
Entonces

$$\ell_v(\varphi) := \int_\Omega \varphi(x) v(x)\, dx = \langle v, \varphi \rangle$$

define una distribución, $\ell_v \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

- $\ell_v(\varphi_1 + \alpha \varphi_2) = \alpha\, \ell_v(\varphi_1) + \ell_v(\varphi_2)$ (lineal)
- $$|\ell_v(\varphi_n - \varphi)| \leq \int_K |v(x)| |\varphi_n(x) - \varphi(x)|\, dx \leq \max_K |\varphi_n - \varphi| \underbrace{\int_K |v(x)|\, dx}_{< \infty}$$
  $\downarrow$ si $n \to \infty$
  0

$\therefore$ $\ell_v \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ fijo

Mapeo: $v \in C_0^\infty(\Omega) \longmapsto \ell_v \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\therefore$ $C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$

A "ciertas funciones" se les pueden asociar distribuciones $\rightarrow$ funciones generalizadas,

Notación: $\quad l \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$$l(\varphi) = \langle l, \varphi \rangle \qquad \text{(estándar)}$$

P. ej. si $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$l_v(\varphi) = \langle l, \varphi \rangle = \langle v, \varphi \rangle$$
$$= \int_\Omega v(x)\varphi(x) \, dx$$

Ejemplos de distribuciones:

(A) $L^1_{loc}(\Omega)$

$$L^1_{loc}(\Omega) := \bigcap_{\substack{K \subset\subset \Omega \\ K \text{ compacto}}} \{ L^1(K) \}$$

$$L^1(K) = \{ f : K \to \mathbb{R} \text{ medible}, \int_K |f(x)| \, dx < \infty \}$$

Def.- Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces su alisamiento es

$$\begin{cases} f^\epsilon := \eta_\epsilon * f \\ f^\epsilon : \Omega_\epsilon \longrightarrow \mathbb{R} \\ f^\epsilon(x) = \int_\Omega \eta_\epsilon(x-y) f(y) \, dy \end{cases}$$

$$\Omega_\epsilon = \{ x \in \Omega \ : \ \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega) > \epsilon \}$$

$$\mathrm{supp}\ \eta_\epsilon \subset B_\epsilon(0) \Rightarrow$$

$$f^\epsilon(x) = \int_{B_\epsilon(0)} \eta_\epsilon(z) f(x-z)\, dz$$

Si f tiene soporte compacto en Ω, $\mathrm{supp}(f) \subset\subset \Omega$ podemos extender $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. La extensión se llama nuevamente f.

$$f^\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta_\epsilon(y)\, dy, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Lema</u> Sea $f \in L^1(\Omega)$, con $\mathrm{supp}(f) \subset\subset \Omega$. Entonces $\forall\, \epsilon > 0$:

(i) $\mathrm{supp}(f^\epsilon) \subset \mathrm{supp}(f) + \{ y : |y| \leq \epsilon \}$

(ii) $f^\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

<u>Dem.</u> Ver Evans (apéndice) $\square$

<u>Teorema</u> (aproximación)

Sea $f \in C_0(\Omega)$. Entonces $f^\epsilon \to f$ si $\epsilon \to 0$ uniformemente en Ω. Si $f \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ entonces $\| f^\epsilon \|_{L^p(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)}$ y además $f^\epsilon \xrightarrow{L^p} f$ si $\epsilon \to 0$.

Dem. La primera observación resulta de:

$$|f^\epsilon(x) - f(x)| \leq \int_\Omega |f(x-y) - f(x)|\, \eta_\epsilon(y)\, dy$$

$$\leq \sup \left\{ |f(x-y) - f(x)| : \begin{array}{l} x \in supp(f) \\ |y| \leq \epsilon \end{array} \right\}$$

f es unif. continua en su soporte.

$\therefore$ $f^\epsilon \to f$ uniformemente en Ω si $\epsilon \to 0^+$.

Sea $f \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Entonces

$$|f^\epsilon(x)| = \left| \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) f(y)\, dy \right|$$

$$\leq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)^{1/p} \eta_\epsilon(x-y)^{1-1/p} |f(y)|\, dy$$

$$\underset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)\, dy \right)^{1-1/p} \times$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y) |f(y)|^p dy \right)^{1/p}$$

$$\Rightarrow \int_\Omega |f^\epsilon(x)|^p dx \leq \int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)\, |f(y)|^p dy$$

$$\underset{\text{Fubini}}{\leq} \int_\Omega |f(y)|^p \left(\int_{B_\epsilon(x)} \eta_\epsilon(x-y)\, dx \right) dy$$

$$\leq \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$$

Si $p=1$ es directo. $\therefore$ $\|f^\epsilon\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}$

Convergencia: sea $\delta > 0$ arbitrario. Entonces podemos escoger $g \in C_0(\Omega)$ tal que

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{3}\delta$$

$$\therefore \quad \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p} \leq \frac{1}{3}\delta$$

y $$\|f^\epsilon - f\|_{L^p} \leq \|f^\epsilon - g^\epsilon\|_{L^p} + \|g^\epsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p}$$

$$\leq \frac{2}{3}\delta + \|g^\epsilon - g\|_{L^p}$$

Para $0 < \epsilon << 1$ el soporte de $g^\epsilon - g$ es uniformemente acotado y $g^\epsilon \to g$ uniformemente. Así,

$$\|g^\epsilon - g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |g^\epsilon - g|^p \, dx$$

$$\leq \sup |g^\epsilon - g|^p \int_{supp(g^\epsilon - g)} dx$$

$$\leq C \sup |g^\epsilon - g|^p \to 0 \quad \text{si } \epsilon \to 0^+.$$

$$\therefore \quad \|f^\epsilon - f\|_{L^p} \to 0 \quad \text{si } \epsilon \to 0 \qquad \square$$

Consecuencias:

Corolario 1 $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

Corolario 2 $\forall \epsilon > 0$ y cualquier $f \in C_0(\Omega)$, entonces ésta se puede aproximar uniformemente por una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\mathrm{supp}(\varphi) \subset \mathrm{supp}(f)$, $|\varphi - f| < \epsilon$ uniformemente en Ω.

Dem. Tomar $\varphi = f^{\epsilon}$ $\square$

Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ entonces define naturalmente una distribución:

$$\begin{cases} \ell_f \in \mathcal{D}'(\Omega) \text{ se define mediante} \\ \ell_f(\varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \end{cases}$$

Si $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$ cuando $n \to \infty$, con $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset K \subset\subset \Omega$ entonces

$$|\ell_f(\varphi) - \ell_f(\varphi_n)| \leq \underbrace{\int_K |f(x)|\, dx}_{<\infty \quad f \in L^1_{loc}(\Omega)} \cdot \underbrace{\max_K |\varphi - \varphi_n|}_{\to 0 \text{ si } n \to \infty \text{ ya que } \varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi}$$

$\therefore \ell_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\langle \ell_f, \varphi \rangle = \ell_f(\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \qquad \text{(notación)}.$$

Dado que $C_0^{\infty}(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^1(\Omega)$ entonces el mapeo

$$\begin{cases} \Phi : L^1_{loc}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ \Phi(f) = \ell_f \end{cases} \text{ es inyectiva.}$$

Ejercicio: probar

- Sean $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$. Entonces $\ell_f = \ell_g$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ ssi $f = g$ c.d.s.
- Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces $\exists$ $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi \equiv 1$ sobre K (cut-off) - (partición de unidad)
- Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible, tal que el mapeo $\varphi \mapsto \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$ define un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ entonces $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

(B) Delta de Dirac

Sea $y \in \Omega$, fijo. Se define $\delta_y \in \mathcal{D}'(\Omega)$, <u>delta de Dirac centrada en $y \in \Omega$</u> como

$$\delta_y(\varphi) := \langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Claramente es lineal; $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $\mathrm{supp}(\varphi) \subset K \subset\subset \Omega$, K compacto entonces

$$|\delta_y(\varphi)| = |\varphi(y)| \leq \max_{\substack{x \in K \\ |\alpha| \leq N}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

$\therefore$ (1) se cumple con $C(K) = 1$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

$$\therefore \quad \delta_y \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

Si $y = 0 \in \Omega$, se escribe $\delta_0 = \delta$.

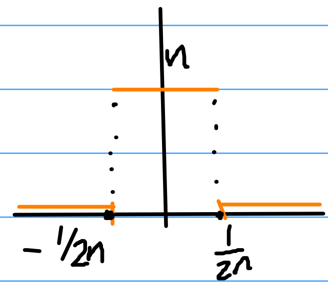
"Función delta de Dirac": heurística, δ tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x)\, dx = f(0)$$

$$\delta_n(x) := \begin{cases} n, & x\in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} =$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) = \int_{-1/2n}^{1/2n} n\, dx = 1 \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$\delta_n(x) \text{ "}\longrightarrow\text{" } \begin{cases} \infty, & x=0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\delta_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$$

$$\langle \delta_n, \varphi\rangle = \int_{-1/2n}^{1/2n} n\,\varphi(x)\, dx$$

Ejercicio:
- δ no está asociada a ninguna función en L^1_{loc}.
- $\delta_n \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
- Tarea 1: más aproximaciones de δ.

(c) Sea $p = p(x)$, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable, $p \in C^1(\Omega)$, cuyos ceros son simples: si $p(x_0) = 0$ con $x_0 \in \Omega$ entonces $\nabla p(x_0) \neq 0$.

Se define $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante el valor principal de Cauchy

$$\ell(\varphi) := P.V. \int_\Omega \frac{\varphi(x)}{p(x)}\, dx$$

$$:= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\Omega \cap \{|p(x)| > \epsilon\}} \frac{\varphi(x)}{p(x)}\, dx$$

Entonces $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (ejercicio).

caso particular: $n = 1$, $p(x) = x$.
(único cero $x_0 = 0$, simple).

sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$

$$P.V. \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \text{ "}=\text{" } \left\langle \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \quad \text{(notación)}$$

$$\| \qquad\qquad \text{a pesar de que } \frac{1}{x} \notin L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \right] \qquad \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{x}\varphi(x) \ \nexists$$

valor principal de Cauchy

$$P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x}\,dx$$

El lím $\exists$ ya que

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{x} \leq 2\sup_{x\in K}|\varphi'(x)|, \quad K\supset \operatorname{supp}(\varphi)$$

$\therefore$ la integral converge absolutamente

La linealidad es clara:

$$P.V.(\varphi_1+\alpha\varphi_2) = P.V.(\varphi_1)+\alpha P.V.(\varphi_2)$$

Sea $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$, $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$, compacto, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Si $K\subset[-r,r]$ con $r>0$ entonces

$$\left| P.V.\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi_n(x)-\varphi(x)}{x}\,dx \right|$$

$$\leq 2r\sup_{K}|\varphi_n'(x)-\varphi'(x)| \longrightarrow 0$$

si $n\to\infty$

ya que $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$

$$\therefore\ P.V.\left(\frac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

Derivadas de distribuciones

Objetivo: definir $\partial_{x_j}\ell$ donde $\ell\in\mathcal{D}'(\Omega)$.

P. ej. $f\in C_0^1(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$ entonces

$$\partial_{x_j} f \in C_0(\Omega)\subset L^1_{loc}(\Omega)$$

Si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces

$$l_{\partial_j f}(\varphi) = \int_\Omega \partial_{x_j} f(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= -\int_\Omega f(x)\, \varphi_{x_j}(x)\, dx, \quad \forall j$$

int. por partes.

<u>Definición</u> Se define la derivada de $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mediante

$$\begin{cases} \partial_{x_j} l \in \mathcal{D}'(\Omega) \\ \partial_{x_j} l : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \\ \partial_{x_j} l(\varphi) := \langle \partial_{x_j} l, \varphi \rangle \\ \qquad = -\langle l, \varphi_{x_j} \rangle = -l(\varphi_{x_j}) \end{cases}$$

Claramente si $\varphi_n \xrightarrow{\infty} \varphi$ entonces $\partial_{x_j} \varphi_n \to \varphi_{x_j}$ uniformemente en Ω.
Por la continuidad de $l \in \mathcal{D}'(\Omega)$:

$$\langle l, \partial_{x_j} \varphi_n \rangle \longrightarrow \langle l, \varphi_{x_j} \rangle \quad \text{si } n \to \infty$$

$$\therefore \quad \partial_{x_j} l(\varphi_n) = -\langle l, \partial_{x_j} \varphi_n \rangle$$

$$\downarrow \; n \to \infty$$

$$-\langle l, \varphi_{x_j} \rangle = \partial_{x_j} l(\varphi)$$

$$\therefore \quad \partial_{x_j} l \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Definición sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, multi-índice $\alpha_j \in \mathbb{Z}$, $\alpha_j \geq 0$, $\forall\, \ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se define:

$$D^\alpha \ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

$$D^\alpha \ell : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$$

$$D^\alpha \ell(\varphi) = \langle D^\alpha \ell, \varphi \rangle$$
$$:= (-1)^{|\alpha|} \langle \ell, D^\alpha \varphi \rangle$$
$$= (-1)^{|\alpha|} \ell(D^\alpha \varphi)$$

Corolario una distribución $\ell \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tiene derivadas sucesivas de todos los órdenes. En particular, funciones $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tienen derivadas sucesivas de todos los órdenes en sentido de distribuciones. (Derivadas débiles.)

Ejemplos:

(A) sea $f \in C^1(\bar{\Omega})$. $\Rightarrow f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

$\Rightarrow$ define una distribución $f = \ell_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\ell_f(\varphi) = \langle \ell_f, \varphi \rangle := \langle f, \varphi \rangle = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Su derivada es:

$$\partial_{x_j} \ell_f(\varphi) = \langle \partial_{x_j} f, \varphi \rangle = -\langle f, \partial_{x_j} \varphi \rangle = -\ell_f(\varphi_{x_j})$$

Integrando por partes:

$$-\int_\Omega f\,\varphi_{x_j}\,dx = \int_\Omega f_{x_j}\,\varphi\,dx = \ell_{f_{x_j}}(\varphi)$$

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$f \in C^1(\bar{\Omega}) \Rightarrow f_{x_j} \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow f_{x_j} \in L^1_{loc}(\Omega)$$

$\therefore$ cuando f es diferenciable la derivada distribucional coincide en sentido de distribuciones con la derivada clásica.

(B) Función de Heaviside:

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

$$H \in L^1_{loc}(\mathbb{R}). \Rightarrow \exists\ \ell_H = H \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

$$\ell_H(\varphi) = \langle H,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} H(x)\,\varphi(x)\,dx$$
$$= \int_0^\infty \varphi(x)\,dx$$
$$\forall\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

$$\frac{d\ell_H}{dx}(\varphi) = \left\langle \frac{dH}{dx},\varphi\right\rangle = -\langle H,\varphi'\rangle$$
$$= -\ell_H(\varphi')$$

$$= - \int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\, dx$$

$$= - \int_0^\infty \varphi'(x)\, dx = \varphi(0)$$

$$= \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

$\therefore \quad \dfrac{dH}{dx} = \delta_0$ en sentido de distribuciones.

Ejercicio: derivadas sucesivas de δ_0

$$\delta^{(m)}(\varphi) = \langle \delta^{(m)}, \varphi \rangle$$

$$= (-1)^m \frac{d^m \varphi}{dx^m}(0)$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$\forall \; m \in \mathbb{N}$.

(c) Sea $f \in C^\infty$ para $x>0$, $x<0$. Los límites

$$\lim_{x \to 0^-} f^{(m)}(x) = f^{(m)}(0^-)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(m)}(x) = f^{(m)}(0+)$$

existen $\forall \; m \in \mathbb{N}$.

saltos de derivadas:

$$\sigma_m := f^{(m)}(0+) - f^{(m)}(0-)$$

Claramente $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$

$$\frac{d\ell_f}{dx}(\varphi) = -\langle \ell_f, \varphi' \rangle$$

$$= f(0+)\varphi(0) - f(0-)\varphi(0) +$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \sigma_0\,\varphi(0) + \langle \ell_{f'}, \varphi' \rangle$$

$$\therefore \quad \frac{d\ell_f}{dx} = \sigma_0\,\delta_0 + \ell_{f'}$$

Ejercicio : $\displaystyle \frac{d^2\ell_f}{dx^2} = \sigma_1\,\delta_0 + \sigma_0\,\frac{d\delta_0}{dx} + \ell_{f''}$

$$\vdots$$

$$\frac{d^m\ell_f}{dx^m} = \sigma_{m-1}\,\delta_0 + \dots + \sigma_0\,\frac{d^{m-1}\delta_0}{dx^{m-1}} + \ell_{f^{(m)}}$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Ejemplo : $f(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ \cos x, & x>0 \end{cases}$

$\sigma_0 = 1$ en $x=0$

Como distribución $f(x) = H(x)\cos x$

$$\frac{d\ell_f}{dx} = \delta_0 + \ell_{f'}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ -\sin x, & x>0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(H(x)\cos x \right) = -H(x)\sin x + \delta_0$$

$$= -\ell_{H(x)\sin x} + \delta_0$$