Lección 1.2: Propiedades básicas. Los teoremas de proyección y de Riesz.

Def: Sea $(X, \|\cdot\|)$ normado. La sucesión $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset X$ es un conjunto completo si dado $u \in X$ existen $\lambda_j^{(n)} \in \mathbb{K}$, $1 \leq j \leq n$ tales que $\|u - u_n\| \to 0$ si $n \to \infty$, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ $u_n := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} \varphi_j$.

Def: Sea $(X, \langle , \rangle)$ de Hilbert. Un conjunto $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es cerrado si cada vez que $\langle u, \varphi_j \rangle = 0$ $\forall j \in \mathbb{N}$ entonces $u \equiv 0$.

Teorema

Sea $(X, \langle , \rangle)$ y $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ conjunto ortonormal

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es completo

(ii) $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es cerrado

(iii) X es separable ($\exists\, Y \subset X$, subespacio vectorial numerable, denso en X, $\overline{Y} = X$)

(iv) $\forall u \in X$, $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$

exp. convergente en serie de Fourier

$\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ son una base ortonormal de $(X, \langle , \rangle)$

Dem. (i) $\Rightarrow$ (iv) Teorema clase pasada (c)

$\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ completo $\Rightarrow$ $\exists\ \lambda_j^{(n)}$ tales que

$$\| u - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} \varphi_j \| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$\underset{(c)}{\Rightarrow} \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j \qquad \forall\, u \in X$$

(iv) $\Rightarrow$ (i) $\quad u = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle$

entonces definimos $\lambda_j^{(n)} := \langle u, \varphi_j \rangle$

$\Rightarrow$ $\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es completo.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Sea $u \perp \{\varphi_j\}$, $\langle u, \varphi_j \rangle = 0 \ \forall j$.

(i) $\Rightarrow$ (iv) $\quad u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j = 0$

$\therefore$ $\{\varphi_j\}$ es cerrado.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Sea $v_n := \sum_{j=1}^{n} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j \to v$ si $n\to\infty$

(Hilbert + ortonormal)

(Teorema pasado (b))

Sea $w := u - v = u - \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$

Así, $\langle w, \varphi_i \rangle = \langle u, \varphi_i \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle$

$= \langle u, \varphi_i \rangle - \langle u, \varphi_i \rangle = 0 \quad \forall\, 1 \le i \le n$

$\{\varphi_j\}$ cerrado $\Rightarrow$ $w = 0$ Así, $u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$

$\therefore$ $\{\varphi_j\}$ es completo

(i) $\Rightarrow$ (iii) Ejercicio : $Y := \text{span}\{\varphi_j\}_{j \in X}$ es denso en X.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Ejercicio.

$\square$

Lema Sea $(X, \langle , \rangle)$ de Hilbert. Entonces :

$u_n \to u \in X \iff$ (a) $\|u_n\| \to \|u\|$ si $n \to \infty$

y (b) $\langle u_n, v \rangle \to \langle u, v \rangle$ si $n \to \infty$, $\forall v \in X$.

Dem. Ejercicio. $\square$

Observación : Ambas condiciones, (a) y (b), se deben cumplir.

$(X, \langle , \rangle)$ de Hilbert, $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ base ortonormal

Teo. $\Rightarrow$
$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$$
$$u_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_n, \varphi_j \rangle \varphi_j \qquad \forall \{u_n\} \subset X$$
$$\Rightarrow \quad u_n - u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u_n - u, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

Parseval:
$$\|u_n - u\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u_n - u, \varphi_j \rangle|^2$$

Sea $u_n := \varphi_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Así, $\langle u_n, \varphi_j \rangle = \delta_n^j \longrightarrow 0$ si $n \to \infty$ $\forall\, j$ fijo

Para cualquier $v \in X$

$$\langle u_n, v \rangle = \langle \varphi_n, v \rangle = \langle \varphi_n, \sum_{j=1}^{\infty} \langle v, \varphi_j \rangle \varphi_j \rangle$$

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v, \varphi_j \rangle|^2$$ serie convergente

$\therefore \quad |\langle v, \varphi_j \rangle|^2 \to 0$ si $j \to \infty$.

$$\langle u_n, v \rangle = \langle \varphi_n, v \rangle \to \underset{\langle 0, v \rangle}{\overset{\parallel}{0}} \quad \text{si } n \to \infty$$

(se cumple (b))

Candidato a límite $u \equiv 0$

Pero, $\|u_n\| = \|\varphi_n\| = 1 \not\to 0$ si $n \to \infty$

(no cumple (a)).

Def. Sea $(X, \langle , \rangle)$. Una sucesión $\{u_n\} \subset X$ converge débilmente a $u \in X$ si

$$\langle u_n, v \rangle \longrightarrow \langle u, v \rangle \quad \forall\, v \in X.$$

Se denota: $\begin{cases} u_n \rightharpoonup u \\ u_n \xrightarrow{w} u \end{cases}$

Ejemplos:

- $L^2((0,2\pi);\mathbb{C}) = \left\{ u + iv : u,v : (0,2\pi) \to \mathbb{R}, \int_0^{2\pi} u^2 + v^2 \, dx < \infty \right\}$

Base ortonormal $\varphi_n = \dfrac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad x \in (0,2\pi)$

$\forall \, \bar{u} \in L^2((0,2\pi);\mathbb{C})$

$$\bar{u}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{2\pi} \bar{u}(s) e^{-ins} \, ds \right) e^{inx}$$

- $L^2((0,\pi);\mathbb{R})$

Base coseno: $\left\{ \dfrac{1}{\sqrt{\pi/2}}, \dfrac{\cos x}{\sqrt{\pi/2}}, \dots, \dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi/2}}, \dots \right\}$

Base seno: $\left\{ \dfrac{\sin x}{\sqrt{\pi/2}}, \dots, \dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi/2}}, \dots \right\}$,

$u(x) \equiv 1 \in L^2(0,\pi)$

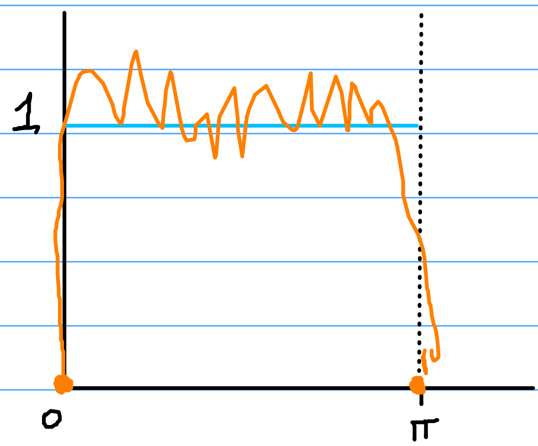
Exp. seno: $1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left\langle 1, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi/2}} \right\rangle_{L^2(0,\pi)} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi/2}}$

$$= \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2(2n+1)}$$

en sentido L^2

Claramente en $\left\{ \begin{matrix} x=0 \\ x=\pi \end{matrix} \right\}$ se tiene $1 \neq 0$.

$$\int_0^\pi \left| 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} (\;\;\shortparallel\;\;) \right|^2 dx \to 0 \quad \text{si} \quad N \to \infty$$



Compacidad

Def. $(X, \|\cdot\|)$ es compacto si toda cubierta abierta, $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$, tiene una subcubierta finita.

Misma def. para $A \subset X$.

(*) **Lema.** $(X, \|\cdot\|)$ es compacto si y sólo si: si $\{G_\alpha\}_{\alpha \in I}$ familia de subconjuntos cerrados tal que $\bigcap_{\alpha \in F} G_\alpha \neq \emptyset$ para cualquier subconjunto finito $F \subset I$, entonces $\bigcap_{\alpha \in I} G_\alpha \neq \emptyset$.

Dem. Ejercicio (tomar complementos de cubiertas abiertas) Δ

Lema $(X, \|\cdot\|)$ normado, $A \subset X$.

- Si A es compacto entonces A es cerrado en X
- Si X es compacto y A es cerrado en X entonces A es compacto.

Dem Ejercicio $\square$

Def. $(X, \|\cdot\|)$ es secuencialmente compacto si toda sucesión $\{u_n\} \subset X$ tiene una subsucesión convergente en X.

Def. Una ϵ-malla en $(X, \|\cdot\|)$ es un conjunto finito $\{u_1, \ldots, u_N\} \subset X$ tal que: todo elemento de X es vecino en orden $O(\epsilon)$ a algún elemento de la ϵ-malla, es decir,

$$X \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(u_j)$$

$$B_\epsilon(u_j) = \{ u \in X : \|u - u_j\| < \epsilon \}.$$

Un espacio $(X, \|\cdot\|)$ es pre-compacto si $\forall \epsilon > 0$ existe una ϵ-malla.

Lema (a) Todo $(X, \|\cdot\|)$ compacto es pre-compacto.
(b) Todo espacio pre-compacto es separable.

Dem. (a) Ejercicio.

(b) Para cada $\epsilon_n := 1/n$, $n \in \mathbb{N}$ sea $F_n \subset X$, una $1/n$- malla finita

$$X \subseteq \bigcup_{\substack{u \in F_n \\ F_n \text{ finito}}} B_{1/n}(u)$$

Sea $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ c/ F_n finito
$\Rightarrow$ A numerable.

Si $v \in X$ y $\epsilon > 0$ arbitrarios entonces es posible hallar un elemento $u \in F_n$ tal que

$$\|u - v\| < \frac{1}{n} < \epsilon$$

$\therefore$ A es denso en X $\square$

Lema. Todo espacio secuencialmente compacto es pre-compacto.

Dem. Sea $\epsilon > 0$ y $A \subset X$ con la sig. propiedad:

- si $u, v \in A$ entonces $\|u - v\| \geq \epsilon$.

Entonces A es un conjunto finito.

Por contradicción : A infinito. Entonces $\exists$ sucesión $u_n \in A$, tal que $\|u_n - u_m\| \geq \epsilon$ $\forall\, n \neq m$. Esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente. Contradicción con $(X, \|\cdot\|)$ secuencialmente compacto.

Sea $u_1 \in X$. Si existe $u_2 \in X$ tal que $\|u_2 - u_1\| \geq \epsilon$ se selecciona $\{u_1, u_2\}$. Si no, $\{u_1\}$ es la malla.

Si $\exists$ $u_3 \in X$ tal que $\|u_1 - u_3\| \geq \epsilon$
$\|u_2 - u_3\| \geq \epsilon$
se selecciona $\{u_1, u_2, u_3\}$.
Si no $\{u_1, u_2\}$ es la malla.

$\vdots$

Si $\exists$ $u_{m+1} \in X$ tal que $\|u_j - u_{m+1}\| \geq \epsilon$ $\forall$ $1 \leq j \leq m$ se selecciona $\{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$. Si no, $\{u_1, \ldots, u_m\}$ es la malla.

El proceso termina en un número finito de pasos, $N \in \mathbb{N}$.

Así, $\forall\, u \in X$ se tiene que $\|u - u_j\| < \epsilon$ para algún $1 \leq j \leq N$.

$\square$

Teorema $(X, \|\cdot\|)$ normado es compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.

Dem "$\Leftarrow$" $(X, \|\cdot\|)$ sec. compacto.

Sea $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ cubierta abierta, $X \subset \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$

Proposición: $\exists\ \epsilon > 0$ tal que toda bola B de radio $\epsilon > 0$ está contenida en algún U_α, $\alpha \in I$: $B \subset U_\alpha$.

Por contradicción: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $B_{1/n}$ que no está contenida en ningún U_α.

$$B_{1/n} = \{ u \in X : \|u - u_n\| < 1/n \}$$

X sec. compacto $\Rightarrow$ $\exists$ u_{n_j} subsucesión convergente.

$$u_{n_j} \to \tilde{u} \in X \qquad n_j \to \infty$$

$\therefore$ $\exists\ \tilde{\alpha} \in I$ tal que $\tilde{u} \in U_{\tilde{\alpha}}$.

$U_{\tilde{\alpha}}$ abierto $\Rightarrow$ $\exists$ $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\tilde{u}) \subset U_{\tilde{\alpha}}$

También $\exists$ $M \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq M$ entonces $\frac{1}{n_j} < \frac{\delta}{2}$ y $\|u_{n_j} - \tilde{u}\| < \frac{\delta}{2}$.

Así, $\forall\, u \in B_{1/n_j}$ se tiene que

$$\|u-\tilde{u}\| \leq \|u-u_{n_j}\| + \|u_{n_j}-\tilde{u}\|$$
$$< \frac{1}{n_j} + \frac{\delta}{2} < \delta$$

$\therefore\ B_{1/n_j} \subset B_\delta(\tilde{u}) \subset U_{\tilde{\alpha}}$ contradicción.

Para toda subcubierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existe $\epsilon>0$ tal que toda Bola B de radio $\epsilon>0$ $B\subset U_\alpha$, para cierto $\alpha\in I$.

Para dicho $\epsilon>0$, existe un conjunto finito $\{u_1,\dots,u_N\}$ tal que $\overline{X} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\epsilon(u_j)$ (sec. compacto $\Rightarrow$ precompacto)

Como cada $B_\epsilon(u_j)$ está contenida en algún U_{α_j}, la subcubierta abierta finita es

$$\bigcup_{j=1}^{N} U_{\alpha_j}$$

Así, $(X,\|\cdot\|)$ es compacto

"$\Leftarrow$)" Ejercicio (usar Lema $(*)$).

Teorema Sea $(X,\|\cdot\|)$ normado. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:

(a) $\overline{B_1(0)} = \{u\in X : \|u\|\leq 1\}$ es compacta.

(b) X es de dimensión finita.

Dem. Ver Bressan, pg. 22-23 $\square$

Def. Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios de Banach, tales que $X \subseteq Y$.
Se dice que X está compactamente contenido en Y si se cumplen:

(i) $X \hookrightarrow Y$ ($\exists\ c>0$ tal que $\|u\|_Y \leq c\|u\|_X,\ \forall u \in X$)

(ii) Toda sucesión acotada en X es precompacta en Y, es decir, $\forall \{u_n\} \subset X$, t.q. $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|_X < \infty$, existe una subsucesión $\{u_{n_j}\}$ que converge en Y:
$$\|u_{n_j} - v\|_Y \to 0 \quad \text{si } n_j \to \infty$$
para cierto $v \in Y$.

Se denota " $X \subset\subset Y$ ".

1.2 Teoremas de proyección y Riesz

Sea $(X, \langle,\rangle)$ de Hilbert. Sea $M \leq X$, subespacio lineal. Claramente, $\overline{M}$ es cerrado en X $\Rightarrow$ $(\overline{M}, \langle,\rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Def. Sea $M \subseteq X$ subespacio lineal de $(X, \langle , \rangle)$ de Hilbert. Se define el complemento ortogonal de M como:

$$M^\perp := \{ v \in X : \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall u \in M \}$$

Lema
(a) $M^\perp$ es cerrado
(b) Si $M, N \subseteq X$ subespacios lineales con $M \subseteq N$ entonces $N^\perp \subseteq M^\perp$.
(c) $\overline{M}^\perp = M^\perp$
(d) $\overline{M} \cap M^\perp = \{0\}$.

Dem. Ejercicio. $\square$

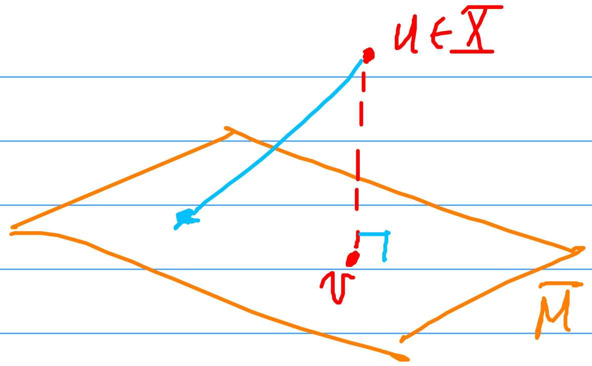
Teorema de proyección

Sean $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert, $M \subseteq X$ subespacio lineal. Entonces $\forall u \in X$ existe un único $v \in \overline{M}$ tal que $u - v \in M^\perp$ y
$$\|u - v\| = \inf_{w \in M} \|u - w\|.$$
v es la proy. ortogonal de u sobre $\overline{M}$.
Por unicidad:

$$u = \underbrace{(u-v)}_{\in M^\perp} + \underbrace{v}_{\in \overline{M}} = (u-v) \oplus v$$

$$X = \overline{M} \oplus M^\perp$$

descomposición ortogonal de X.



Dem. Unicidad: sup. $\forall\, u \in X$,

$u = w + v = \tilde{w} + \tilde{v}$ con $w, \tilde{w} \in M^{\perp}$
$v, \tilde{v} \in \overline{M}$

Entonces, $\underbrace{w - \tilde{w}}_{\in M^{\perp}} = \underbrace{\hat{v} - v}_{\in \overline{M}} \Rightarrow \begin{array}{c} w - \tilde{w} \\ v - \hat{v} \end{array} \in \overline{M} \cap M^{\perp}$

$\Rightarrow \begin{array}{c} w = \tilde{w} \\ v = \tilde{v} \end{array}$ unicidad.

Existencia: Sea $d := \inf_{v \in \overline{M}} \|u - v\| \geq 0$

$\therefore\ \exists$ sucesión $v_n \in \overline{M}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que

$d_n := \|u - v_n\| \longrightarrow d$ si $n \to \infty$

suc. decreciente

Paralelogramo:

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2\Big(\|u - v_n\|^2 + \|u - v_m\|^2 + - 2\,\|u - \underbrace{\tfrac{1}{2}(v_n + v_m)}_{\in \overline{M}}\|^2 \Big)$$

$$\leq 2\left(d_n^2 + d_m^2 - 2d^2\right) \leq 4\left(d_n^2 - d^2\right) \underset{n\to\infty}{\downarrow 0}$$

si $m > n$.

$\|v_n - v_m\| \to 0$ si $m > n \longrightarrow \infty$.

$\{v_n\}$ es de Cauchy en $\overline{M}$.

$\Rightarrow$ $\exists$ $v \in \overline{M}$ tal que $v = \lim_{n\to\infty} v_n$ en $\overline{M}$.

y $d = \|u - v\|$.

$\square$

<u>Corolario</u>: $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$.

<u>Funcionales lineales</u>

$(X, \|\cdot\|)$. $D \subset X$, una función

$$\ell : D \subset X \to \mathbb{K}$$

es un <u>funcional</u> en X con dominio D.

Si $D_\ell \subset X$ es el dominio de $\ell : D_\ell \to \mathbb{K}$
$D_s \subset X$ " " " $s : D_s \to \mathbb{K}$

y además:
- $D_s \subset D_\ell$
- $\ell(u) = s(u)$ $\forall u \in D_s$

entonces ℓ es una <u>extensión</u> de s $(s \subset \ell)$.

ℓ continua en $v \in D_\ell$ si $\lim_{\substack{n\to\infty \\ u_n \in D_\ell \\ u_n \to v}} \ell(u_n) = \ell(v)$

$R(\ell) = \{ \alpha \in \mathbb{K} : \exists\ u \in D_\ell \text{ con } \ell(u) = \alpha \}$

$\operatorname{Ker} \ell = \{ u \in D_\ell : \ell(u) = 0 \}$.

ℓ inyectivo ssi $\operatorname{Ker} \ell = \{0\}$.

ℓ es <u>acotado</u> si $\exists\ C > 0$ tal que

$$|\ell(u)| \leq C \|u\| \qquad \forall u \in D_\ell.$$

$\ell : D_\ell \subset X \to \mathbb{K}$ es lineal si:

- D_ℓ es subespacio lineal
- $\ell(\alpha u + v) = \alpha \ell(u) + \ell(v)$
  $\forall\ u, v \in D_\ell,\ \forall \alpha \in \mathbb{K}$

<u>Lema</u> Un funcional lineal $\ell : D_\ell \subset X \to \mathbb{K}$ es acotado si y sólo si es continuo.

$$\|\ell\| := \sup_{\substack{u \in D_\ell \\ \|u\| \leq 1}} |\ell(u)| < \infty$$

<u>Dem</u>. Ejercicio $\square$

<u>Teorema de representación de Riesz</u>

Sea $(X, \langle , \rangle)$ de Hilbert. Entonces:

(i) Para cada $v \in X$ <u>fijo</u>, el mapeo $u \mapsto \langle u, v \rangle$ es un funcional lineal continuo en X (dominio $D = X$).

(ii) Sea $\ell : \mathfrak{X} \to \mathbb{K}$ funcional lineal continuo en $\mathfrak{X}$ ($D_\ell = \mathfrak{X}$).
Entonces existe un único elemento $v_\ell \in \mathfrak{X}$ tal que

$$\ell(u) = \langle u, v_\ell \rangle \quad \forall\ u \in \mathfrak{X}$$

Además $\quad \|\ell\| = \|v_\ell\|_{\mathfrak{X}}$.

Dem: (i) $\forall\ v \in \mathfrak{X}$ fijo, por sesquilinealidad de $\langle , \rangle$, claramente el mapeo

$$u \mapsto \langle u, v \rangle =: \ell_v(u) \qquad u \in \mathfrak{X}.$$

es un funcional lineal en $\mathfrak{X}$. Además,

$$\|\ell_v\| \leq \sup_{\substack{\|u\| \leq 1 \\ u \in \mathfrak{X}}} \|v\| \|u\| = \|v\|$$

$\therefore\ \ell_v$ es continuo.

(ii) Si $\ell(u) = 0\ \forall\ u \in \mathfrak{X}$, $\ell \equiv 0$ se toma $v_\ell = 0$.

$\ell \not\equiv 0$. $\quad M := \operatorname{Ker} \ell = \{ u \in \mathfrak{X} : \ell(u) = 0 \}$

M es subespacio vectorial, M es cerrado.

Teo. proyección: $\quad \mathfrak{X} = M \oplus M^{\perp}$.

Si $M^{\perp} = \{0\} \Rightarrow \quad X = M, \quad \ell \equiv 0.$

Sup. $M^{\perp} \neq \{0\}. \quad \exists \quad v_0 \in M^{\perp}, \quad v_0 \neq 0.$

Para $u \in X$ arbitrario :

$$\ell(u) v_0 - \ell(v_0) u \in M = \ker \ell .$$

$$\Big(\ell\big(\ell(u) v_0 - \ell(v_0) u \big) = \underbrace{\ell(u)\ell(v_0) - \ell(v_0)\ell(u)}_{\equiv 0} \Big)$$

$v_0 \in M^{\perp} \Rightarrow$

$$0 = \langle \ell(u) v_0 - \ell(v_0) u, v_0 \rangle = \ell(u) \|v_0\|^2 + - \ell(v_0) \langle u, v_0 \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \ell(u) = \frac{1}{\|v_0\|^2} \ell(v_0) \langle u, v_0 \rangle$$

$$= \left\langle u, \frac{\overline{\ell(v_0)}}{\|v_0\|^2} v_0 \right\rangle$$

$$v_\ell := \frac{\overline{\ell(v_0)}}{\|v_0\|^2} v_0 .$$

Por (i) : $\|\ell\| \leq \|v_\ell\| = \dfrac{|\ell(v_0)|}{\|v_0\|}$

$$= \left| \ell\left(\frac{v_0}{\|v_0\|} \right) \right| \leq \|\ell\|$$

$$\therefore \|v_\ell\| = \|\ell\|$$

Unicidad : $\ell(u) = \langle u, v_1 \rangle = \langle u, v_2 \rangle \ \forall u \in X$

$\Rightarrow \quad \langle u, v_1 - v_2 \rangle = 0 \quad \forall \ u \in X$

$\Rightarrow \quad \| v_1 - v_2 \|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_2$

unicidad

$\square$

Ejercicio : Riesz $\Rightarrow$ teo. proyección.

[Riesz $\equiv$ Teo. Proyección]