Lección 1.1: Propiedades básicas, espacios de Banach y de Hilbert

Motivación:

Objetivo: desarrollar herramientas de Análisis Funcional en estudio de EDPs.

Características:

- Teoría de "well-posedness" (existencia y unicidad de soluciones) para problemas c/ estructura
- Idea: soluciones de EDPs $\leftrightarrow$ vectores en espacios vectoriales de funciones.
- Formulación variacional o débil en el espacio apropiado.
- Teoría de regularidad: sol. débil $\Rightarrow$ sol. "fuerte" o clásica.

Idea natural: considerar $C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 0$
Sin embargo, estos espacios no son adecuados.

Problema conocido: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Sea $f \in C(\bar{\Omega})$, arbitraria. Sea el problema:

$$(1) \ldots \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Si existe $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ (o bien $u \in C_0^2(\Omega)$) a (1) la llamamos solución clásica.

$C^2(\Omega)$ no es el espacio natural.

Sea $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$.

$$f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{3x_3^2}{|x|^2} - 1\right) \dfrac{1}{\log\left(\frac{|x|}{2}\right)}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ entonces f es de clase C^∞.

$\dfrac{x_3^2}{|x|^2} \leq 1$, $\log\left(\dfrac{|x|}{2}\right) \to -\infty$ si $x \to 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$ $\therefore$ f es continua en $x = 0$

$f \in C(\overline{B_1(0)})$

La solución está determinada por la función de Green asociada a la $B_1(0)$

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{B_1(0)} \frac{f(y)}{|x-y|} \, dy$$

Pero, $u \notin C^2(B_1(0))$. Se puede probar (ejercicio) que en $x = (0,0,a) \in B_1(0)$

$$\partial_{x_3} u(0,0,a) = -\frac{2}{5}\left[-\frac{3}{a^4}\int_0^a \frac{\rho^4 \, d\rho}{\log(\rho/2)} + \frac{a}{\log(a/2)} + \right.$$
$$\left. + 4a \frac{\log(a/2)}{\log(1/2)} + \frac{2a^2}{a \log\log(a/2)}\right]$$

y $$u(0,0,a) = -\frac{2}{5}\left[\frac{1}{a^3}\int_0^a \frac{\rho^4}{\log(\rho/2)} \, d\rho + 2a^2 \log\left(\frac{\log(a/2)}{\log(1/2)}\right)\right]$$

Si $a \to 0^+$ entonces $\partial_{x_3} u(0,0,a) \to 0$, pero

$$\frac{1}{a}\Big(\partial_{x_3} u(0,0,a) - \underbrace{\partial_{x_3} u(0,0,0)}_{=0} \Big) \longrightarrow \infty \quad \text{si } a \to 0.$$

$\therefore$ u <u>no</u> es C^2 en el origen.

Recordemos que si $G(x,y)$ es la función de Green para Ω entonces si $f \in C^2(\Omega)$

$$u(x) = \int_\Omega G(x,y) f(y)\, dy \quad \in C^2(\Omega)$$

En nuestro contraejemplo, el operador solución

$$Kf := \frac{1}{4\pi} \int_{B_1(0)} \frac{f(y)}{|x-y|}\, dy$$

no mapea C^0 en C^2.

Podemos plantear: multiplicar (1) por una función de prueba $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ e integrar por partes:

$$\int_\Omega \nabla\varphi \cdot \nabla u \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \cdots (2)$$

Hallar $u \in C_0^1(\Omega)$ tal que cumpla (2) $\forall\, \varphi \in C_0^1(\Omega)$

Por el principio de Dirichlet la solución a (2) minimiza la energía:

$$E[v] := \underbrace{\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx}_{\text{energía "cinética"}} - \underbrace{\int_\Omega f v \, dx}_{\text{energía "potencial"}}$$

Salvo casos triviales, el mínimo de E no $\exists$ en $C_0^1(\Omega)$.

Espacio adecuado es :
- $\nabla v \in L^2(\Omega)$
- $v = 0$ sobre $\partial\Omega$

$H_0^1(\Omega)$ - espacio de Sobolev.

Espacio de Hilbert $\langle u, v \rangle_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$

las derivadas se definen en sentido distribucional.

Sección 1 Espacios de Hilbert, Banach

1.1 Propiedades básicas

Espacio vectorial abstracto $\underline{X}$
Campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$
+ adición
· mult. por escalar

Propiedades básicas :

(i) $\lambda u \in X$
(ii) $1 \cdot u = u$
(iii) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta) \cdot u$
(iv) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha u + \alpha v$
(v) $(\alpha + \beta) u = \alpha u + \beta u$
(vi) $\underset{\in \mathbb{K}}{0} \cdot u = 0 \in X$

$\forall \, \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{K}, \quad u, v \in X$

Ejemplos :

- $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$
- $C([a,b];\mathbb{R})$
- $C^k(\Omega;\mathbb{R})$

Def. Un espacio vect. normado $(X, \|\cdot\|)$ es un esp. vectorial X donde está definida una norma $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ tal que:

(a) $\|u\| \geq 0$ y $\|u\| = 0$ ssi $u = 0 \in X$

(b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$

(c) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (triángulo)

$\forall \, u,v \in X, \ \lambda \in \mathbb{K}$

Ejemplos:

- $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \max\limits_{1 \leq j \leq n} |x_j|$
- $\mathbb{R}^n$ con $\|x\| = \left(\sum x_j^2\right)^{1/2}$
- $C(\bar{\Omega})$ $\|u\| = |u|_0 = \max\limits_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)|$

  $\bar{\Omega}$ compacto

- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ medible}, \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Nota: $\|u - v\| = d(u,v)$ es una métrica.

$\Rightarrow$ topología (abiertos, cerrados, compactos, etc.)

Def. Sea X esp. vectorial. Un producto interno es una función

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{K}$$

tal que : (a) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (simetría)

(b) $\langle u, u \rangle \geq 0$ (no negativa)

(c) $\langle u, u \rangle = 0$ ssi $u = 0 \in X$ (definida)

(d) $\langle \lambda u + \mu v, w \rangle = \lambda \langle u, w \rangle + \mu \langle v, w \rangle$
$\langle w, \lambda u + \mu v \rangle = \overline{\lambda} \langle w, u \rangle + \overline{\mu} \langle w, v \rangle$

(sesquilinealidad)

$\forall\, u, v, w \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$

Def. Un esp. vectorial c/ prod. interno se denomina pre-Hilbert.

Ejemplos :
- $\mathbb{R}^n$ con $\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j$
- $\mathbb{C}^n$ con $\langle x, y \rangle = \sum x_j \overline{y_j}$
- $H^1(\Omega)$ con $\langle u, v \rangle_{H^1} = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)} + \sum \partial_{x_j} u \overline{\partial_{x_j} v}$

Proposición : Todo espacio pre-Hilbert es un espacio normado con norma

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}.$$

Dem. Ejercicio. $\square$

Lema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

En todo pre-Hilbert $(\mathbb{X}, <,>)$

$$|<u,v>| \leq \|u\| \, \|v\| \, , \qquad \forall u,v \in \mathbb{X}.$$

Dem. Ejercicio. $\square$

Lema Sea $(\mathbb{X}, <,>)$ pre-Hilbert. Entonces $\forall \, u,v \in \mathbb{X}$:

(a) $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2 \operatorname{Re} <u,v> + \|v\|^2$

(b) $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4 \operatorname{Re} <u,v>$

(identidad de polarización)

(c) $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$

(ley paralelogramo)

Dem. Ejercicio $\square$

Convergencia

Def. Sea $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ normado. Una sucesión $\{u_n\} \subset \mathbb{X}$, $n \in \mathbb{N}$, converge a un elemento $u \in \mathbb{X}$ en la norma $\|\cdot\|$ si $\|u_n - u\|_{\mathbb{X}} \to 0$ si $n \to \infty$.

$$\begin{cases} u_n \to u \text{ en } \mathbb{X}. \\ u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathbb{X}}} u \end{cases}$$

Def. $\{u_n\} \subset X$, $(X, \|\cdot\|)$ normado es sucesión de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\epsilon)$ tal que $\|u_n - u_m\| < \epsilon$ $\forall$ $n, m \geq N$.

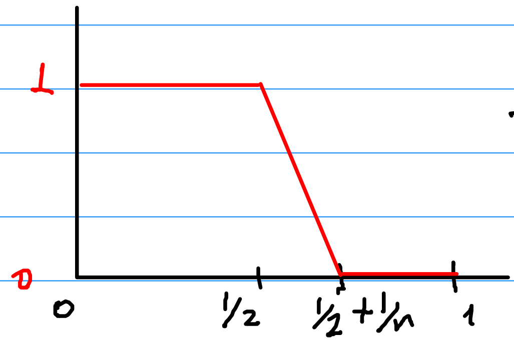
Lema (unicidad del límite)

Si $u_n \to u$, $u_n \to \tilde{u}$ en $(X, \|\cdot\|)$ entonces $u = \tilde{u} \in X$.

Dem. $0 \leq \|u - \tilde{u}\| \leq \|u - u_n\| + \|u_n - \tilde{u}\| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$ $\square$

Nota: una sucesión de Cauchy no siempre converge.

$X = C([0,1]; \mathbb{R})$, $\|u\|_{L^1} = \int_0^1 |u(x)|\, dx$

$u_n(x) =$  $\xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 1, & [0, 1/2] \\ 0, & (1/2, 1] \end{cases}$

u_n es de Cauchy en $(X, \|\cdot\|)$ no converge en X.

Def. Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach si es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge en X.

Ejemplos: • $\mathbb{R}^n$ completo en la norma euclidiana

• $C^0(\bar{\Omega})$ completo en la norma $|\cdot|_0$ (teorema de Arzelá-Ascoli)

• $L^p(\Omega)$ de Banach en la norma $\|\cdot\|_{L^p}$

• $\ell^p = \{ x = (x_1, x_2, \dots) : \sum |x_j|^p < \infty \}$

es de Banach en la norma

$$\|x\|_{\ell^p} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Nota: dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, éste es "completable"

<u>Def.</u> Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados. Si $\exists$ un mapeo

$$\psi : X \to Y$$

inyectivo, tal que $\|u - v\|_X = \|\psi(u) - \psi(v)\|_Y$ $\forall\, u, v \in X$ entonces ψ es una isometría entre X y Y (espacios isométricos).

<u>Def.</u> Sea $(X, \|\cdot\|_X)$. Un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ es una compleción de $(X, \|\cdot\|_X)$ si:

(a) $(X, \|\cdot\|_X)$ es isométrico a un subespacio $(Z, \|\cdot\|_Y)$, $Z \subset Y$

(b) Z es <u>denso</u> en Y, es decir, $\bar{Z} = Y$.

$$\overline{Z} := \{ u \in X : \exists\ z_n \in Z \text{ tal que } z_n \to u \text{ en } X \}$$

<u>Teorema</u> Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ tiene una compleción única módulo homomorfismos.

<u>Dem.</u> Ejercicio (ver Yosida, pág. 56)

$\square$

(Idea: tomar clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy
$\{u_n\} \sim \{v_n\}$ ssi $\|u_n - v_n\| \to 0 \quad n \to \infty$)

Ejemplo: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado.

$$X = C_0^k(\Omega) = \{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{ continuas}, D^\alpha u \text{ continua}, |\alpha| \leq k, \operatorname{supp} u \subset K \subset \Omega, K \text{ compacto} \}$$

$$\|u\|_{H_0^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

se puede probar que $(X, \|\cdot\|_{H_0^k})$ es pre-Hilbert. Pero <u>no</u> es completo (contraejemplo $k=0$, $\Omega = [0,1]$).

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^k(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^k}}$$

Def. Un esp. con producto escalar, $(X, \langle , \rangle)$ completo se denomina espacio de Hilbert.

Def: Sean $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normados, tales que

$$X \subseteq Y.$$

Si $\exists$ $C \geq 0$ uniforme tal que

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X \quad , \quad \forall u \in X$$

entonces X está continuamente incluido en Y. Se denota $X \hookrightarrow Y$

Mapeo inclusión: $\begin{cases} i : X \to Y \\ i : u \mapsto u \end{cases}$

Ejemplos :

- $X = \mathbb{R} \qquad Y = \mathbb{R}^2$
  $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad u \mapsto (u,0)$
  $\|u\|_X = |u| = \|(u,0)\|_Y = |u|.$

- Inclusión <u>no</u> continua : $X = Y = C([0,1];\mathbb{R})$

$$\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{L^1} , \quad \|\cdot\|_Y = \sup |\cdot|$$

$$u_n(x) = \begin{cases} -n^2x + n , & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 , & \text{otro caso.} \end{cases}$$

$\forall n ,$ $\quad \|u_n\|_X = \|u_n\|_{L^1} = \frac{1}{2} \qquad X \not\hookrightarrow Y$

$\|u_n\|_Y = n$

Def: Sea $(X, \|\cdot\|)$. Sea $Z \subset X$. Si $\overline{Z} = X$ entonces Z es denso en X.

Lema Sea $(X, \|\cdot\|)$, $A, B \subseteq X$.

(a) $\overline{\phi} = \phi$, $\overline{X} = X$

(b) $A \subseteq \overline{A}$

(c) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

(d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Dem. Ejercicio $\square$

Independencia lineal

Def: $(X, \|\cdot\|)$. Sea $\{u_1, \ldots, u_N\} \subset X$. Es linealmente dependiente si $\exists$ $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, con $\sum |\alpha_j| \neq 0$ tales que

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j = 0$$

Lema un subconjunto $\{u_1, \ldots, u_N\} \subset X$, $(X, \langle , \rangle)$ pre-Hilbert, es linealmente dependiente ssi la matriz $D \in \mathbb{K}^{N \times N}$, $D_{ij} = \langle u_i, u_j \rangle$, $1 \leq i, j \leq N$ es singular.

Dem. "$\Rightarrow$" $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j u_j = 0$, $\sum |\alpha_j| \neq 0$

Entonces, $\langle \sum \alpha_j u_j, u_i \rangle = 0 \quad \forall \ 1 \leq i \leq N$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \langle u_j, u_i \rangle = 0 \iff D^T \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix}}_{\neq 0} = 0.$$

$\therefore$ D^T singular.

"$\Leftarrow$" D singular. Sea $\bar{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{pmatrix} \in \ker D^T$

$$\Rightarrow D^T \alpha = 0 \Rightarrow \langle \sum \alpha_j u_j, u_i \rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \| \sum \alpha_j u_j \|^2 = \langle \sum \alpha_j u_j, \sum \alpha_i u_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \sum \alpha_j u_j = 0. \quad \square$$

Ejemplos:

- $X = L^2([0,1])$ $\quad \{1, x, x^2, \dots, x^N\}$ $\forall N \in \mathbb{N}$ son linealmente independientes

$$\langle x^i, x^j \rangle_{L^2} = \int_0^1 x^i x^j \, dx = \frac{1}{1+i+j}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/(N+1) \\ 1/2 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ 1/(N+1) & & & \cdots & 1/(2N+1) \end{pmatrix}$$

$\det D \neq 0$ (ejercicio)

- $X = L^2([0,\pi])$ $\quad \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos Nx\}$ es linealmente independiente $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\langle \cos px, \cos qx \rangle_{L^2} = \int_0^{\pi} \cos px \cos qx \, dx$$

$$= \begin{cases} 0, & p \neq q \\ \frac{\pi}{2}, & p = q \end{cases} \quad \forall p, q$$

$$D = \frac{\pi}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{invertible.}$$

También $\{\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin Nx\}$, son l.i.

- $L^2([0,2\pi];\mathbb{C})$ $\quad \{1, e^{i\theta}, e^{i2\theta}, \ldots, e^{iN\theta}\}$ es l.i. $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\langle e^{ip\theta}, e^{iq\theta} \rangle_{L^2} = \begin{cases} 0, & p \neq q \\ 2\pi, & p = q \end{cases}$$

__Def.__ Sea $(X, \langle , \rangle)$. Se dice que $u \in X$ es ortogonal a $v \in X$ si $\langle u, v \rangle = 0$. (Notación $u \perp v$.)

__Def.__ Un conjunto $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N\} \subset X$, $(X, \langle , \rangle)$ es ortogonal si $\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = 0$ $\forall i \neq j$. Es ortonormal si además $\langle \varphi_j, \varphi_j \rangle = 1$.

Teorema Sea $(X, \langle , \rangle)$ pre-Hilbert. Sea $\{\varphi_j\}$, $j \in \mathbb{N}$, tal que $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ es ortonormal $\forall N \in \mathbb{N}$.

Entonces $\forall u \in X$ se define la serie finita de Fourier

$$u_n := \sum_{j=1}^{n} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$$

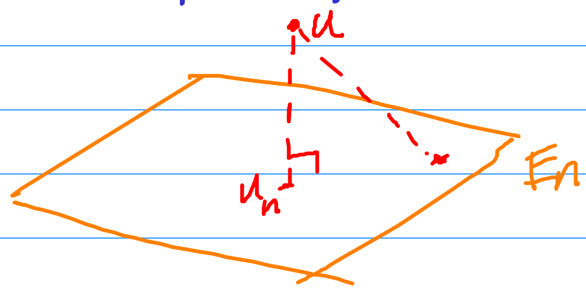
$\alpha_j := \langle u, \varphi_j \rangle$ coeficiente de Fourier.

Se cumple:

(a) $\| u - u_n \| \leq \| u - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j \|$

para cualesquiera β_j. La igualdad ocurre ssi $\beta_j = \alpha_j \ \forall j$.

$E_n := \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$



(b) Desigualdad de Bessel:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2 \leq \|u\|^2$$

Además, si $(X, \langle , \rangle)$ es de Hilbert entonces $u_n = \sum_{j=1}^{n} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$ es convergente en X.

(c) Si $(X, <,>)$ es de Hilbert y existen escalares $\lambda_j^{(n)}$ tales que

$$\| u_n - v_n \| \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

donde $v_n := \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{(n)} \varphi_j \in E_n$

entonces :

- $\lambda_j^{(n)} \to \alpha_j \quad n \to \infty \quad \forall j$
- $v = u = \sum_{j=1}^{\infty} \langle u, \varphi_j \rangle \varphi_j$
- $\| u \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle u, \varphi_j \rangle|^2$ identidad de Parseval.

Dem. (a) Sea $v_n := \sum_{j=1}^{n} \beta_j \varphi_j$, β_j arbitrarios $\in E_n$

Entonces,

$$\langle u - v_n, u - v_n \rangle = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} \beta_j \underbrace{\langle \varphi_j, u \rangle}_{=\overline{\alpha_j}} - \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j} \underbrace{\langle u, \varphi_j \rangle}_{=\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|^2$$

$\{\varphi_j\}_{j=1}^{n}$ es ortonormal

$$\Rightarrow \| u - v_n \|^2 = \|u\|^2 + \sum_{j=1}^{n} | \beta_j - \alpha_j |^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$$

Tomando $v_n \equiv u_n$ $\left(\beta_j = \alpha_j \right)$ entonces

$$\|u-u_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|u-v_n\|^2 = \|u-u_n\|^2 + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |\beta_j - \alpha_j|^2}_{\substack{= \|u_n - v_n\|^2 \\ \text{por ortonormalidad}}}$$

$$\Rightarrow \quad \|u-v_n\|^2 = \|u-u_n\|^2 + \|u_n - v_n\|^2$$

$\therefore$ $\|u-u_n\| \leq \|u-v_n\|$ igualdad sólo si $u_n = v_n$.

(b) $0 \leq \|u-u_n\|^2 = \|u\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 =: S_n \leq \|u\|^2$$

$$S_n \to S = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \leq \|u\|^2 \quad \text{Bessel.}$$

Además, $\|u_{n+k} - u_n\|^2 = \|\sum_{j=n+1}^{n+k} \alpha_j \varphi_j\|^2$

$$\overset{\text{ortonormalidad}}{=} \sum_{j=n+1}^{n+k} |\alpha_j|^2$$

$\sum^{\infty} |\alpha_j|^2$ convergente $\rightarrow$ es de Cauchy.

$\therefore \quad \| u_{n+k} - u_n \|^2 < \epsilon \qquad$ si $n \geq N(\epsilon)$

$\therefore \quad \{u_n\}$ es de Cauchy en X.

Si $(X, \langle , \rangle)$ es de Hilbert $\Rightarrow$ $u_n \to v \in X$ convergente.

(c) suponiendo $(X, \langle , \rangle)$ Hilbert

$$0 \leftarrow \| u - v_n \|^2 = \underset{\downarrow (a)}{\| u - u_n \|^2} + \| u_n - v_n \|^2$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} u_n \to u \\ u_n - v_n \to 0 \end{array} \right\} \text{ en } X$$

si $n \to \infty$.

Por unicidad del límite $\quad u = v = \sum^{\infty} \alpha_j \varphi_j$

(Parseval)

Como $u_n - v_n \to 0$:

$$|\langle u_n - v_n, \varphi_j \rangle| \leq \| u_n - v_n \| \| \varphi_j \|$$

$$= \| u_n - v_n \| \to 0$$

$\therefore \quad \langle u_n - v_n, \varphi_j \rangle \to 0$ si $n \to \infty$. $\quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Así,
$$\langle \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j^{(n)} - \alpha_j) \varphi_j}_{u_n - v_n}, \varphi_i \rangle = \lambda_i^{(n)} - \alpha_i \xrightarrow{} 0$$

si $n \to \infty$

$\square$