ANÁLISIS FUNCIONAL

EL LEMA DE ZORN, EL PRINCIPIO DE MAXIMALIDAD DE HAUSDORFF Y EL AXIOMA DE ELECCIÓN

(SECCIÓN 2)

01/09/2024

RAMÓN G. PLAZA

1. Introducción

A partir del axioma de elección, vamos a deducir el lema de Zorn y el principio de maximalidad de Hausdorff. El material de esta nota está basado en el apéndice del libro de Rudin [4].

Definición 1.1. *Un* orden parcial *en un conjunto no vacío X es una relación binaria $\prec$, definida en X, tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$ se tiene lo siguiente:*

(a) *si $x \prec y$ y $y \prec z$ entonces $x \prec z$ (transitividad);*
(b) *si $x \prec y$ y $y \prec x$ entonces $x = z$ (antisimetría); y,*
(c) *$x \prec x$ para todo $x \in X$ (reflexividad).*

Un orden parcial $\prec$ en X se denomina un orden total (o lineal) *si además se cumple:*

(d) *para cualesquiera $x, y \in X$, necesariamente se tiene que $x \prec y$, o bien que, $y \prec x$.*

Ejemplo 1.2. *$\mathbb{R}$ está totalmente ordenado por $\leq$. Para cualquier conjunto E, su potencia $\mathcal{P}(E)$ está parcialmente ordenado por inclusión, mas no es un orden total.*

Observación 1.3. *Un orden parcial en $X \neq \varnothing$ induce un orden parcial en cualquier subconjunto $E \subset X$, $E \neq \varnothing$.*

Definición 1.4. *Dos conjuntos parcialmente ordenados, X, Y, se denominan* isomorfos en orden *si existe un mapeo biyectivo, $f : X \to Y$, tal que*

$$x \prec y \quad \Longrightarrow \quad f(x) \prec f(y).$$

Definición 1.5. *Si un conjunto $X \neq \varnothing$ está parcialmente ordenado por $\prec$ entonces un* elemento maximal (respectivamente, minimal) *de X es un elemento $x \in X$ tal que el único elemento $y \in X$ que satisface $x \prec y$ (respectivamente, $y \prec x$) es él mismo. Una* cota superior *de un subconjunto $W \subset X$ es un elemento $x \in X$ tal que $w \prec x$ para todo $w \in W$.*

Observación 1.6. *Dependiendo de los conjuntos X y W, la cota superior puede no existir. Un conjunto parcialmente ordenado $X \neq \varnothing$ puede tener o no tener elementos maximales. Además, un elemento maximal puede no ser una cota superior. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado por $\leq$ pero no tiene elementos maximales. No todo subconjunto propio, $E \subsetneq \mathbb{R}$, tiene una cota superior. El único elemento maximal (en sentido de inclusión) de $\mathcal{P}(X)$ es X.*

Un principio fundamental en teoría de conjuntos se conoce como *lema de Zorn*.

Lema 1.7 (lema de Zorn)**.** *Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto parcialmente ordenado. Supongamos que todo subconjunto totalmente ordenado de X tiene una cota superior. Entonces X tiene, al menos, un elemento maximal.*

El lema de Zorn es equivalente al *axioma de elección*.

Definición 1.8. *Una* función de elección *para un conjunto X es un mapeo $\psi : \mathcal{P}(X) \to X$ que asocia, a cada subconjunto no vacío de X, $E \subset X$, $E \neq \varnothing$, un elemento de E: $\psi(E) \in E$.*

En otras palabras, la función de elección ψ "selecciona" un elemento de cada subconjunto no vacío de X.

Axioma 1.9 (axioma de elección)**.** *Para cualquier conjunto no vacío X existe una función de elección.*

El lema de Zorn fue demostrado a partir del axioma de elección por Kuratowski en 1922 [2] e, independientemente, por Zorn en 1935 [5], razón por la que se le conoce también como *lema de Kuratowski-Zorn*, sobre todo en países de Europa del Este (véase Moore [3]). Una formulación anterior del lema de Zorn es el principio de maximalidad de Hausdorff de 1914 [1].

Teorema 1.10 (principio de maximalidad de Hausdorff)**.** *Sea X un conjunto no vacío parcialmente ordenado por $\prec$. Entonces existe un subconjunto maximal (en sentido de inclusión) totalmente ordenado, $A \subset X$. (Es decir, existe un subconjunto $A \subset X$ totalmente ordenado por $\prec$, con la propiedad siguiente: si $A \subset S \subset X$ y S es totalmente ordenado por $\prec$ entonces $A = S$.)*

2. Demostración del principio de maximalidad de Hausdorff

En esta sección demostraremos el principio de maximalidad de Hausdorff a partir del axioma de elección.

Definición 2.1. *Sea $\mathcal{F}$ una colección de conjuntos. Decimos que $\Phi \subset \mathcal{F}$ es una* subcadena *de $\mathcal{F}$ de Φ si está totalmente ordenada por inclusión (es decir, para cualesquiera $A, B \in \Phi$ se tiene que $A \subset B$, o bien, que $B \subset A$).*

El siguiente resultado es la esencia de la demostración.

Lema 2.2 (lema de Zermelo)**.** *Supongamos que $\mathcal{F}$ es una colección no vacía de subconjuntos de un conjunto X tal que la unión de cualquier subcadena Φ de $\mathcal{F}$ pertenece a $\mathcal{F}$:*

$$\bigcup_{\substack{E \in \Phi \\ \Phi \text{ subcadena}}} E \quad \in \mathcal{F}$$

Supongamos también que $g : A \mapsto g(A) \in \mathcal{F}$, $\forall A \in \mathcal{F}$, es un mapeo $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ tal que $A \subset g(A)$ para todo $A \in \mathcal{F}$ y que $g(A) \backslash A$ consiste de, a lo más, un elemento. Entonces existe al menos un elemento $\widetilde{A} \in \mathcal{F}$ tal que $g(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$.

Demostración. Dado que $\mathcal{F} \neq \varnothing$, entonces fijamos un elemento $A_0 \in \mathcal{F}$. Definimos entonces lo que se conoce como una torre. Una subcolección $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ se denomina una *torre con respecto a A_0* si satisface lo siguiente:

(i) $A_0 \in \mathcal{F}'$.
(ii) La unión de cualquier subcadena de $\mathcal{F}'$ pertenece a $\mathcal{F}'$.
(iii) Si $A \in \mathcal{F}'$ entonces $g(A) \in \mathcal{F}'$.

Definimos ahora la colección

$$\mathcal{F}_1 := \{A \in \mathcal{F} \, : \, A_0 \subset A\}.$$

Es fácil verificar que $\mathcal{F}_1$ es una torre. En efecto, claramente $A_0 \in \mathcal{F}_1$ (y por ende, $\mathcal{F}_1 \neq \varnothing$); por lo tanto se satisface (i). Por otro lado, sea $\Phi \subset \mathcal{F}_1$ una subcadena. Entonces claramente $A_0 \subset \bigcup_{E \in \Phi} E$, ya que $A_0 \subset E$ para todo $E \in \Phi \subset \mathcal{F}_1$. Por lo tanto, $\bigcup_{E \in \Phi} E \in \mathcal{F}_1$. Esto prueba (ii). Finalmente, si $A \in \mathcal{F}_1$ entonces $A_0 \subset A \subset g(A)$ implica que $g(A) \in \mathcal{F}_1$. Esto prueba (iii).

Concluimos entonces que la familia de todas las torres de $\mathcal{F}$ es no vacía y podemos definir,

$$\mathcal{F}_0 := \bigcap_{\mathcal{F}' \text{ torre}} \mathcal{F}'.$$

Vamos a verificar que $\mathcal{F}_0$ es, en sí misma, una torre. Dado que $A_0 \in \mathcal{F}'$ para toda torre $\mathcal{F}'$ entonces claramente $A_0 \in \mathcal{F}_0$; esto prueba (i). Sea $\Phi \subset \mathcal{F}_0$ una subcadena de $\mathcal{F}_0$. Entonces se tiene que $E \in \mathcal{F}'$ para toda torre $\mathcal{F}'$ siempre que $E \in \Phi$. Por lo tanto, $E \in \mathcal{F}_0$ para todo $E \in \Phi$ y esto implica que $\bigcup_{E \in \Phi} E \in \mathcal{F}_0$ para toda subcadena Φ. Esto demuestra (ii). Ahora sea $A \in \mathcal{F}_0$. Entonces $A \in \mathcal{F}'$ para toda torre $\mathcal{F}'$ y por ende $g(A) \in \mathcal{F}'$ para toda torre $\mathcal{F}'$. Esto implica que $g(A) \in \mathcal{F}_0$ y se demuestra la propiedad (iii) para $\mathcal{F}_0$.

Hemos demostrado que $\mathcal{F}_0$ es una torre. Además, por construcción, está claro que $\mathcal{F}_0$ es la mínima torre de $\mathcal{F}$. Ahora vamos a probar que, además, $\mathcal{F}_0$ es una subcadena de $\mathcal{F}$.

Proposición 2.3. *$\mathcal{F}_0$ es una subcadena de $\mathcal{F}$, es decir, $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenado por inclusión.*

Demostración de la Proposición 2.3. Definimos el conjunto

$$\Gamma := \big\{ C \in \mathcal{F}_0 \, : \, \forall A \in \mathcal{F}_0, \;\; A \subset C, \text{ o bien, } C \subset A \big\} \subset \mathcal{F}_0.$$

Basta con demostrar que Γ es una torre: dado que $\mathcal{F}_0$ es la mínima torre de $\mathcal{F}$ entonces $\mathcal{F}_0 \subset \Gamma$ y concluimos que $\Gamma = \mathcal{F}_0$, es decir, $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenado por inclusión.

Para demostrar que Γ satisface (i), tomemos cualquier elemento $A \in \mathcal{F}_0 = \bigcap_{\mathcal{F}' \text{ torre}} \mathcal{F}' \neq \varnothing$, es decir, $A \in \mathcal{F}'$ para cualquier torre $\mathcal{F}'$. En particular, $A \in \mathcal{F}_1 = \{A \in \mathcal{F} \, : \, A_0 \subset A\}$. Por lo tanto, $A_0 \subset A$ para cualquier elemento $A \in \mathcal{F}_0$. Esto implica que $A_0 \in \Gamma$.

Para demostrar (ii), sea Φ una subcadena de $\Gamma \subset \mathcal{F}_0$. Como $\mathcal{F}_0$ es una torre entonces Φ es también una subcadena de $\mathcal{F}_0$ y por lo tanto

$$U := \bigcup_{B \in \Phi} B \in \mathcal{F}_0.$$

Tomemos cualquier elemento $A \in \mathcal{F}_0$. Si Φ es vacía entonces tenemos el caso trivial: $\Phi = \varnothing \subset \Gamma$. Por lo tanto supongamos que $\Phi \neq \varnothing$ y sea $B \in \Phi \subset \Gamma$. Por ser subcadena, Φ está totalmente ordenada por inclusión. En el caso en que $A \subset B$ tenemos claramente que $A \subset B \subset U$. Es decir, si existe $B \in \Phi$ tal que $A \subset B$ entonces claramente $A \subset U$. Supongamos que $A \not\subset B$ para todo $B \in \Phi \subset \Gamma$. Dado que $A \in \mathcal{F}_0$, por la definición de Γ concluimos que $B \subset A$ para todo $B \in \Phi$. Por lo tanto, $U = \bigcup_{B \in \Phi} B \subset A$. Hemos demostrado que para todo $A \in \mathcal{F}_0$ se cumple que, o $A \subset U$, o bien $U \subset A$. Esto demuestra que la unión de cualquier subcadena de Γ pertenece a Γ, es decir, la propiedad (ii).

Finalmente, para demostrar (iii), consideremos cualquier elemento $C \in \Gamma$, arbitrario pero fijo (claramente, $\Gamma \neq \varnothing$ ya que $A_0 \in \Gamma$). Definimos entonces el conjunto,

$$\Phi(C) := \{B \in \mathcal{F}_0 \, : \, B \subset C, \;\text{ ó }\; g(C) \subset B\} \subset \mathcal{F}_0.$$

Afirmamos que para todo $C \in \Gamma$, $\Phi(C)$ satisface las propiedades (i), (ii) y (iii) de una torre. En efecto, dado que $A_0 \subset A$ para cualquier elemento $A \in \mathcal{F}_0$ entonces tenemos que $A_0 \subset C \in \Gamma \subset \mathcal{F}_0$. Es decir, $A_0 \in \Phi(C)$. Esto prueba (i).

Por otro lado, sea Ψ una subcadena de $\Phi(C)$ y consideremos su unión,

$$\widetilde{U} := \bigcup_{B \in \Psi} B.$$

Si $B \subset C$ para todo $B \in \Psi$ entonces claramente $\widetilde{U} \subset C$. Suponiendo que esto no es cierto entonces existe $B_0 \in \Psi$ tal que $B_0 \not\subset C$. Pero dado que $B_0 \in \Phi(C)$ entonces necesariamente $g(C) \subset B_0 \subset \widetilde{U}$. Concluimos que, o bien $\widetilde{U} \subset C$, o $g(C) \subset \widetilde{U}$. Por lo tanto $\widetilde{U} \subset \Phi(C)$ para cualquier subcadena Ψ. Esto prueba (ii).

Finalmente, vamos a verificar la propiedad (iii) de una torre para el conjunto $\Phi(C)$. Supongamos que $B \in \Phi(C)$. Tenemos que demostrar que $g(B) \in \Phi(C)$. En virtud de que $B \in \Phi(C)$ tenemos dos casos: o bien, (a) $B \subset C$, ó (b) $g(C) \subset B$. En el caso (b), $g(C) \subset B$, tenemos claramente que $g(C) \subset B \subset g(B)$ ya que $B \in \Phi(C) \subset \mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_0$ es una torre. Por lo tanto concluimos que $g(C) \subset g(B)$ en este caso. En el caso (b) tenemos dos subcasos: (b_1), $B = C$, o bien (b_2), $B \subsetneqq C$. Si $B = C$ entonces claramente $g(B) = g(C)$. Supongamos entonces que $B \subsetneqq C$. Dado que $C \in \Gamma$ y $g(B) \in \mathcal{F}_0$ entonces, o bien $C \subset g(B)$, o $g(B) \subset C$. Pero por hipótesis, $B \subsetneqq C$, por lo cual C no puede ser un subconjunto propio de $g(B)$ ya que $g(B)\backslash B$ tiene, a lo más, un solo elemento. Esto implica que, o bien $g(B) = C$, o $g(B) \subset C$. Es decir, que $g(B) \subseteq C$. En ambos casos tenemos que, o bien $g(B) \subset C$, o $g(C) \subset g(B)$. Esto implica que $g(B) \in \Phi(C)$ y se satisace la propiedad (iii) de una torre para el conjunto $\Phi(C)$.

Concluimos que $\Phi(C)$ es una torre para todo $C \in \Gamma$. Dado que $\mathcal{F}_0$ es la torre mínima y $\Phi(C) \subset \mathcal{F}_0$ entonces se tiene que $\Phi(C) = \mathcal{F}_0$ para todo $C \in \Gamma$. Esto significa que, para cada $C \in \Gamma$ arbitrario, todo elemento $A \in \mathcal{F}_0$ satisface $A \subset C$, o $g(C) \subset A$. En virtud de que $C \subset g(C)$ para todo $C \in \Gamma \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ tenemos que,

$$A \subset g(C), \quad \text{ó}, \quad g(C) \subset A,$$

para todo $A \in \mathcal{F}_0$. Esto demuestra que si $C \in \Gamma$ entonces $g(C) \in \; Gamma$, es decir, Γ también satisface la propiedad (iii) de una torre.

Hemos probado que Γ es una torre y, por ende, $\Gamma = \mathcal{F}_0$ y $\mathcal{F}_0$ está totalmente ordenado por inclusión. Esto termina la demostración de la Proposición 2.3. $\square$

Para concluir la demostración del lema de Zermelo, definimos $\widetilde{A}$ como la unión de todos los elementos de $\mathcal{F}_0$,

$$\widetilde{A} := \bigcup_{E \in \mathcal{F}_0} E.$$

Dado que $\mathcal{F}_0$ es una torre y una subcadena (totalmente ordenado por inclusión) entonces claramente $\widetilde{A} \in \mathcal{F}_0$ y $g(\widetilde{A}) \in \mathcal{F}_0$. Pero, por definición, $E \subset \widetilde{A}$ para todo $E \in \mathcal{F}_0$. Esto implica que $g(\widetilde{A}) \subset \widetilde{A}$. Además, por hipótesis sobre el mapeo g, $\widetilde{A} \subset g(\widetilde{A})$. Concluimos que $g(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$. Además, claramente, $\widetilde{A} \subset \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ y con esto concluimos la demostración del lema de Zermelo. $\square$

Vamos a aplicar el lema de Zermelo para demostrar el principio de maximalidad de Hausdorff.

Demostración del Teorema 1.10. Sea X un conjunto no vacío parcialmente ordenado por $\prec$. Sea $\mathcal{F}$ la colección de todos los subconjuntos totalmente ordenados (por $\prec$) de X. Dado que X es no vacío existe un elemento $x_0 \in X$. El conjunto $\{x_0\} \subset X$ es, claramente, un subconjunto totalmente ordenado. Por lo tanto la colección $\mathcal{F}$ es no vacía. Mas aún, la unión de cualquier subcadena $\Phi \subset \mathcal{F}$ es totalmente ordenada. En efecto, sea

$$U := \bigcup_{E \in \Phi} E,$$

para cualquier subcadena $\Phi \subset \mathcal{F}$. Sean $x, y \in U$. Entonces existen subconjuntos $E_x, E_y \in \Phi$ tales que $x \in E_x$ y $y \in E_y$. Dado que $\Phi \subset \mathcal{F}$ entonces E_x y E_y son conjuntos totalmente ordenados por $\prec$. Además, como Φ es una subcadena de $\mathcal{F}$, sabemos también que Φ está totalmente ordenada por inclusión y por lo tanto, o bien $E_x \subset E_y$, ó $E_y \subset E_x$. En cualquier caso, los elementos x y y pertenecen a un conjunto totalmente ordenado y por lo tanto tenemos que, o bien $x \prec y$, ó $y \prec x$. Esto implica que U es totalmente ordenado.

Ahora bien, para cada $A \in \mathcal{F}$ definimos el siguiente conjunto:

$$\varrho(A) := \{x \in A^c \, : \, A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}.$$

Sea ψ una *función de elección* para X (axioma de elección). Definimos entonces el siguiente mapeo, $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$,

$$g(A) := \begin{cases} A \cup \{\psi(\varrho(A))\}, & \text{si } \varrho(A) \neq \varnothing, \\ A, & \text{si } \varrho(A) = \varnothing, \end{cases} \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Por su definición, este mapeo satisface las hipótesis del lema de Zermelo:

- $g(A) \in \mathcal{F}$ para todo $A \in \mathcal{F}$,
- $A \subset g(A)$, y
- $g(A) \backslash A$ consiste de, a lo más, un elemento.

Por el lema de Zermelo, existe un elemento $\widetilde{A} \in \mathcal{F}$ tal que $g(\widetilde{A}) = \widetilde{A}$. Esto implica que $\varrho(\widetilde{A}) = \varnothing$. El conjunto $\widetilde{A}$ es el elemento maximal buscado. En efecto, sea $S \in \mathcal{F}$ un subconjunto de $\mathcal{F}$ (y por ende, totalmente ordenado por $\prec$) tal que $\widetilde{A} \subset S$. Si suponemos que $\widetilde{A} \subsetneqq S$ entonces existe un elemento $x \in S$ tal que $x \neq \widetilde{A}$. Como S está totalmente ordenado por $\prec$, entonces para todo elemento $a \in \widetilde{A}$ se tiene que $a \prec x$, o bien que $x \prec a$. Pero esto implica que el conjunto $\widetilde{A} \cup \{x\}$ es totalmente ordenado y, por ende, $\widetilde{A} \cup \{x\} \in \mathcal{F}$. Esto es una contradicción con $\varrho(\widetilde{A}) = \varnothing$. Por lo tanto concluimos que $\widetilde{A} = S$ y $\widetilde{A}$ es el elemento maximal (por inclusión) de $\mathcal{F}$. El teorema está demostrado. $\square$

3. Demostración del lema de Zorn

A continuación aplicaremos el principio de maximalidad de Hausdorff para demostrar el lema de Zorn.

Demostración del Lema 1.7. Sea $X \neq \varnothing$ un conjunto parcialmente ordenado y supongamos que todo subconjunto totalmente ordenado de X tiene una cota superior. Por el principio de maximalidad de Hausdorff (Teorema 1.10) existe un subconjunto totalmente ordenado, A, que es maximal por inclusión. Si $a \in X$ denota una cota superior de A entonces el conjunto $A \cup \{a\}$ es totalmente ordenado y contiene a A. Pero, por maximalidad de A, se tiene también que $A \cup \{a\} \subset A$, es decir, $a \in A$. Esto significa que a es un elemento maximal de A. Afirmamos que a es también un elemento maximal de x. Supongamos que existe $x \in X$ tal que $a \prec x$. Entonces, aplicando el mismo argumento, el conjunto $A \cup \{x\}$ es un conjunto totalmente ordenado. Por lo tanto, por maximalidad de A, $A \cup \{x\} \subset A$ y $x \in A$. Pero esto es una contradicción con la propiedad de a de ser un elemento maximal de A. Por lo tanto, a es elemento maximal de X. □

Referencias

[1] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenfehre*, de Gruyter, Leipzig, 1914. Reprinted by Chelsea, New York, 1965.

[2] K. Kuratowski, *Une methode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fundam. Math. **3** (1922), pp. 76–108.

[3] G. H. Moore, *Zermelo's axiom of choice. Its origins, development, and influence*, vol. 8 of Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third ed., 1987.

[5] M. Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), no. 10, pp. 667–670.

Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, Universidad Nacional Autónoma de México, Circuito Escolar s/n, C.P. 04510 Cd. de México (México)

Email address: plaza@aries.iimas.unam.mx