

ANÁLISIS FUNCIONAL I
(9 CRÉDITOS)
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
SEMESTRE 2025-1

RAMÓN G. PLAZA

INFORMACIÓN GENERAL

Contacto.

Ramón G. Plaza
Oficina 221 (segundo piso), IIMAS (edificio principal).
E-mail: plaza@aries.iimas.unam.mx
Web: <https://mym.iimas.unam.mx/ramon/>

Horario.

- Las clases se llevarán a cabo los **lunes y miércoles, de 15:00 a 17:15 hrs.** en el **salón 203** del Edificio B (antes Edificio Anexo) del IIMAS.
- La primera clase tendrá lugar el próximo **lunes 5 de agosto, a las 15:00 hrs.**

Horas de oficina.

- En la primera reunión (5 de agosto) se definirá una hora fija a la semana (horas de oficina) para atender a los alumnos con dudas y aclaraciones sobre el contenido del curso.

Página del curso.

- La página del curso contendrá todos los anuncios relacionados con el mismo, así como tareas, calendario, temario y demás material auxiliar.
- La liga permanente de la página del curso es:
<https://mym.iimas.unam.mx/ramon/AnalisisFuncional-2025-1.html>

Evaluación.

Se evaluará al alumno con 4 tareas (50%) y 2 exámenes parciales (50%). El primer examen parcial tendrá lugar a la mitad del semestre en una fecha por determinar. El segundo examen parcial tendrá lugar durante las semanas de exámenes ordinarios (del 25 de noviembre al 6 de diciembre).

Calendario.

- Periodo de clases: 5 de agosto al 22 de noviembre, 2024.
- Periodo de exámenes: 25 de noviembre al 6 de diciembre, 2024.
- Días inhábiles: 16 de septiembre; 1, 2 y 18 de noviembre, 2024.

Objetivo. Éste es un curso básico del área de Análisis. El objetivo principal del curso es introducir al estudiante a las herramientas básicas del Análisis Funcional, es decir, a la teoría de espacios normados completos (espacios de Banach) y a los operadores lineales definidos sobre tales espacios.

Pre-requisitos. Por tratarse de un curso básico, en principio no hay pre-requisitos; sin embargo, es deseable que el alumno tenga buenas bases de Análisis Real a nivel licenciatura.

TEMARIO

1. Espacios normados y de Banach
 - 1.1 Espacios métricos y espacios normados: propiedades básicas.
 - 1.2 Topología y convergencia. Espacios completos.
 - 1.3 Espacio cociente.
 - 1.4 Compacidad.
 - 1.5 Operadores y funcionales lineales.
 - 1.6 Espacio dual.
 - 1.7 Aplicaciones: el teorema de punto fijo de Banach.
2. El teorema de Hahn-Banach.
 - 2.1 El lema de Zorn.
 - 2.2 Versión analítica del teorema de Hahn-Banach: extensión de funcionales lineales.
 - 2.3 Versión geométrica del teorema de Hahn-Banach: separación de espacios convexos.
 - 2.4 El espacio bidual. Relaciones de ortogonalidad.
 - 2.5 Aplicaciones: funciones holomorfas, funcionales lineales en $C[a, b]$.
3. El teorema de categoría de Baire y sus consecuencias.
 - 3.1 El teorema de Baire.
 - 3.2 El principio de acotamiento uniforme de Banach-Steinhaus.
 - 3.3 El teorema de la gráfica cerrada.
 - 3.4 El teorema del mapeo abierto.
 - 3.5 Aplicaciones: series de Fourier, subespacios complementarios.
4. Topologías débil y débil-*.
 - 4.1 La topología débil.
 - 4.2 La topología débil-*.
 - 4.3 Espacios reflexivos y separables. El teorema de Banach-Alaoglu.
 - 4.4 Espacios uniformemente convexos.
 - 4.5 Aplicaciones: cálculo de las variaciones.
5. Espacios de Hilbert
 - 5.1 Definición y propiedades básicas.
 - 5.2 Ortogonalidad y ortonormalidad.
 - 5.3 Bases ortonormales: conjuntos completos, desigualdad de Bessel.
 - 5.4 Teoremas de proyección y de representación de Riesz.
 - 5.5 Operadores autoadjuntos, unitarios y normales.
 - 5.6 Aplicaciones: el teorema de Lax-Milgram, desigualdades variacionales.
6. Teoría espectral de operadores acotados.
 - 6.1 Operadores acotados en espacios de Hilbert. Espectro y resolvente.
 - 6.2 Operadores compactos, adjunto y espectro.

- 6.3 Operadores semi-Fredholm. Índice de Fredholm.
- 6.4 Alternativa de Fredholm.
- 6.5 El teorema espectral para operadores acotados auto-adjuntos.
- 6.6 Valores propios de operadores normales.
- 6.7 Operadores positivos, raíces cuadradas.
- 6.8 Aplicaciones.
- 7. Teoría espectral de operadores auto-adjuntos.
 - 7.1 Operadores cerrados y no acotados. Extensiones.
 - 7.2 Operadores simétricos y auto-adjuntos.
 - 7.3 Espectro y resolvente. Resoluciones de la identidad.
 - 7.4 Representación espectral de operadores unitarios.
 - 7.5 El teorema espectral para operadores auto-adjuntos.
 - 7.6 Aplicaciones: operadores en mecánica cuántica, el principio de incertidumbre de Heisenberg.

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica. Los textos centrales para este curso son los libros de Kreyszig [14], Brezis [4], Rudin [22] y Kesavan [13]. La mayor parte del material que cubriremos se puede encontrar en estos textos. El libro de Kreyszig es excelente para iniciarse en el tema. El estudiante puede utilizarlo como texto base del curso.

Bibliografía complementaria. Otros textos introductorios similares al libro de Kreyszig y más modernos son el de Robinson [21] y el de Haase [10]. El material de las secciones 1 y 5 es elemental; utilizaré los textos ya citados y algunos otros, como el de Bressan [3], Schechter [23] y Conway [6].

Para las secciones dedicadas a los teoremas fundamentales (2 y 3) me basaré principalmente en los libros de Brezis [4], Kesavan [13], Bühler y Salamon [5] y Rudin [22]. Complementaré algunos temas con material del clásico libro de Yosida [25]. Para la sección 4 usaré esencialmente el libro de Brezis [4], Bressan [3] y el de Kesavan [13]. Para las secciones dedicadas a teoría espectral de operadores (secciones 6 y 7), recomiendo especialmente los textos de Birman y Solomjak [2], Kato [12], Akhiezer y Glazman [1], Reed y Simon [19], Dunford y Schwartz [7, 8], Hislop y Sigal [11] y Schmüdgen [24].

Con el fin de complementar el material del curso, profundizar en algunos temas e introducirse en algunos nuevos, siempre recomiendo consultar los textos *clásicos* sobre el tema, tales como los libros de Yosida [25], Lax [15], Riesz y Sz-Nagy [20], Kato [12], los cuatro volúmenes de Reed y Simon [16–19] y los tres volúmenes de Dunford y Schwartz [7–9].

REFERENCIAS

- [1] N. I. AKHIEZER AND I. M. GLAZMAN, *Theory of linear operators in Hilbert space*, Dover Publications Inc., New York, 1993. Translated from the Russian and with a preface by Merlynd Nestell, Reprint of the 1961 and 1963 translations, Two volumes bound as one.
- [2] M. S. BIRMAN AND M. Z. SOLOMJAK, *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*, Mathematics and its Applications (Soviet Series), D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.
- [3] A. BRESSAN, *Lecture notes on functional analysis*, vol. 143 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2013.
- [4] H. BREZIS, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, New York, 2011.

- [5] T. BÜHLER AND D. A. SALAMON, *Functional analysis*, vol. 191 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2018.
- [6] J. B. CONWAY, *A course in functional analysis*, vol. 96 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 1990.
- [7] N. DUNFORD AND J. T. SCHWARTZ, *Linear operators. Part I: General Theory*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1958 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [8] ———, *Linear operators. Part II: Spectral theory. Selfadjoint operators in Hilbert space*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1963 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [9] ———, *Linear operators. Part III: Spectral operators*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. With the assistance of William G. Bade and Robert G. Bartle, Reprint of the 1971 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [10] M. HAASE, *Functional analysis*, vol. 156 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2014. An elementary introduction.
- [11] P. D. HISLOP AND I. M. SIGAL, *Introduction to spectral theory*, vol. 113 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to Schrödinger operators.
- [12] T. KATO, *Perturbation theory for linear operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1995. Reprint of the 1980 edition.
- [13] S. KESAVAN, *Functional analysis*, vol. 52 of Texts and Readings in Mathematics, Springer, Singapore; Hindustan Book Agency, New Delhi, second ed., 2023.
- [14] E. KREYSZIG, *Introductory functional analysis with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [15] P. D. LAX, *Functional analysis*, Pure and Applied Mathematics (New York), Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, New York, 2002.
- [16] M. REED AND B. SIMON, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1975.
- [17] ———, *Methods of modern mathematical physics. IV. Analysis of operators*, Academic Press – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1978.
- [18] ———, *Methods of modern mathematical physics. III. Scattering theory*, Academic Press – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York-London, 1979.
- [19] ———, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, Inc. – Harcourt Brace Jovanovich, Publishers, New York, second ed., 1980. Functional analysis.
- [20] F. RIESZ AND B. SZ.-NAGY, *Functional analysis*, Dover Books on Advanced Mathematics, Dover Publications, Inc., New York, 1990. Translated from the second French edition by Leo F. Boron, Reprint of the 1955 original.
- [21] J. C. ROBINSON, *An introduction to functional analysis*, Cambridge University Press, London, 2020.
- [22] W. RUDIN, *Functional analysis*, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, second ed., 1991.
- [23] M. SCHECHTER, *Principles of functional analysis*, vol. 36 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2002.
- [24] K. SCHMÜDGEN, *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert space*, vol. 265 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, Dordrecht, 2012.
- [25] K. YOSIDA, *Functional analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Sixth ed., 1980.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, CIRCUITO ESCOLAR S/N, C.P. 04510 CD. DE MÉXICO (MÉXICO)
 Email address: plaza@aries.iimas.unam.mx