Análisis Funcional

Semestre 2025-1

Tarea 3: Elementos de teoría espectral

1. Demuestra lo siguiente:

(a) (5 puntos) Sea X de Banach y $A \in \mathcal{B}(X)$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que existe $u_n \in X$, sucesión tal que $\|u_n\| = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $Au_n - \lambda u_n \to 0$ si $n \to \infty$. Entonces $\lambda \in \sigma(A)$. (Nota: esta es una caracterización del espectro "aproximado"; a la sucesión se le llama *sucesión de Weyl* o *singular*.)

(b) (5 puntos) Sea H de Hilbert y $A \in \mathcal{B}(H)$ un operador lineal, acotado y autoadjunto. Entonces al menos uno de $\|A\|$ ó $-\|A\|$ es un elemento de $\sigma(A)$.

2. (10 puntos) Sea H de Hilbert. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(H)$, operadores lineales acotados y autoadjuntos. Se dice que $T_1 \leq T_2$ siempre que $\langle T_1 u, u\rangle \leq \langle T_2 u, u\rangle$ para todo $u \in H$. En particular, $T \in \mathcal{B}(H)$ es *positivo*, $T \geq 0$, si $\langle Tu, u\rangle \geq 0$ para todo $u \in H$. Si $A \geq 0$, acotado y autoadjunto, es tal que $A^2 = T$ entonces se denota $A = T^{1/2}$.

(a) (5 puntos) Prueba que todo operador lineal $T \in \mathcal{B}(H)$, acotado, positivo y autoadjunto, tiene una única raíz cuadrada positiva, $A = T^{1/2}$. Muestra que este operador conmuta con todo operador $L \in \mathcal{B}(H)$ que conmute con T.

(b) (5 puntos) Prueba que todo proyector, $P^2 = P$ y autoadjunto, en H es positivo ($P \geq 0$) y que $\|P\| \leq 1$, con $\|P\| = 1$ sólo si $P(H) \neq \{0\}$.

3. (10 puntos) Demuestra el *teorema de Hellinger-Toeplitz:* Sean H de Hilbert complejo y $T : H \to H$ un operador tal que $\langle Tu, v\rangle = \langle u, Tv\rangle$ para cualesquiera $u, v \in H$. Entonces T es *acotado*. (Nota: como corolario de este teorema tenemos que un operador autoadjunto, *no acotado,* no puede estar definido en todo H, es decir, necesariamente $D(T) \subsetneq H$.)

4. (10 puntos) Sea H de Hilbert complejo (no trivial, $H \neq \{0\}$). Sea $U : H \to H$ un operador lineal unitario. Demuestra que $\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \, : \, |\lambda| = 1\}$.

5. (10 puntos) Sea H un espacio de Hilbert complejo. Sea

$$h(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n,$$

con $\alpha_n \in \mathbb{R}$, una serie absolutamente convergente para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq R$, para cierto radio de convergencia $R > 0$. Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ autoadjunto con $\|A\| \leq R$. Demuestra que

$$h(A) = \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| A^n,$$

es un operador acotado, $h(A) \in \mathcal{B}(H)$, y autoadjunto, con $\|h(A)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n| R^n$. Prueba que si un operador acotado, $T \in \mathcal{B}(H)$, conmuta con A, entonces también conmuta con $h(A)$.

Total: 50 pts.