Análisis Funcional
Semestre 2025-1

Tarea 2: Teorema de categoría de Baire y sus consecuencias. Topologías débil y débil-*

1. Principio de condensación de singularidades. Sean X un espacio de Banach, $\{Y_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ una colección de espacios normados y $T_n^m : X \to Y_m$, $n \in \mathbb{N}$, una colección de operadores acotados, $T_n^m \in \mathcal{B}(X, Y_m)$. Supongamos que para cada $m \in \mathbb{N}$ existe $u_m \in X$ tal que

$$\limsup_{n\in\mathbb{N}} \left\| T_n^m(u_m) \right\|_{Y_m} = \infty.$$

Demuestra que el conjunto

$$A = \left\{ u \in X \,:\, \limsup_{n\in\mathbb{N}} \left\| T_n^m(u) \right\|_{Y_m} = \infty, \, \forall\, m \in \mathbb{N} \right\},$$

es de la segunda categoría en X (es decir, A no es la unión numerable de conjuntos densos en ninguna parte).

2. Series de Fourier en $\big(C_{\mathrm{per}}\big([-\pi,\pi]\big), \|\cdot\|_\infty\big)$.

(a) Demuestra la siguiente versión del teorema de Banach-Steinhaus:

Teorema 1 (Banach-Steinhaus)**.** Sean X un espacio de Banach y Y un espacio normado. Sea J un conjunto arbitrario de índices y, para cada $\alpha \in J$, sea $T_\alpha \in \mathcal{B}(X, Y)$ un operador lineal acotado, con $D(T_\alpha) = X$, $\forall \alpha \in J$. Entonces, o existe una constante uniforme $M > 0$ tal que $\|T_\alpha\| \leq M$ para toda $\alpha \in J$, o bien $\sup_{\alpha\in J} \|T_\alpha(u)\| = \infty$ para todo u perteneciente a un conjunto denso tipo G_δ de X.

(b) Sea $X = C_{\mathrm{per}}\big([-\pi,\pi]\big)$ el espacio de Banach de funciones continuas, 2π-periódicas, en la norma $\|u\|_\infty = \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |u(x)|$. Definimos la familia de funcionales (indexada por $m \in \mathbb{N}$)

$$\begin{cases} \ell_m : X \longrightarrow \mathbb{C}, \quad m \in \mathbb{N}, \\ \ell_m(u) := \displaystyle\sum_{n=-m}^{m} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(s) e^{-ins}\, ds. \end{cases}$$

Se probó en clase que $\ell_m \in X^*$, $\forall m \in \mathbb{N}$ y que

$$\|\ell_m\|_* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_m(s)|\, ds \to \infty,$$

cuando $m \to \infty$, donde $D_m(x) = \sum_{n=-m}^{m} e^{inx}$, es el núcleo de Dirichlet. Aplica el teorema de Banach-Steinhaus probado en (a) para demostrar que existe un subconjunto denso de X, de tipo G_δ, en donde las series de Fourier de todas las funciones (continuas y 2π-periódicas) en dicho conjunto divergen en $x = 0$. Extrapola el resultado para probar que, para cada $x \in [-\pi,\pi]$, existe un conjunto denso E_x de tipo G_δ tal que las series de Fourier de las funciones en dicho conjunto divergen en x.

(c) Sea $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunto *denso* y numerable de puntos en $[-\pi,\pi]$ (por ejemplo, $[-\pi,\pi]\cap\mathbb{Q}$). Sea

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{x_j} \subset X.$$

Demuestra que E es un subconjunto denso de tipo G_δ de X, tal que, para toda $u \in E$, el conjunto $Q_u \subset (-\pi,\pi)$ donde su serie de Fourier diverge, es un subconjunto denso de $(-\pi,\pi)$ de tipo G_δ. Demuestra que existe un conjunto no numerable de funciones continuas y 2π-periódicas, cuyas series de Fourier divergen en algún subconjunto no numerable de $(-\pi,\pi)$.

3. Sea X un espacio normado y $W \subset X$ un subconjunto. Demuestra que W es acotado si y sólo si $\sup_{w\in W} |\ell(w)| < \infty$ para todo $\ell \in X^*$.

4. Sean X, Y, Z, espacios de Banach. Prueba que si $T \in \mathcal{C}(Y,Z)$, $S \in \mathcal{C}(X,Y)$ y $T^{-1} \in \mathcal{B}(Z,Y)$ (la inversa de T existe y es un operador acotado), entonces $TS \in \mathcal{C}(X,Z)$.

5. Sean X, Y de Banach y $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal tal que $\mathrm{Ran}(T)$ es cerrado en Y y existe una constante uniforme $M > 0$ tal que $\|Tu\| \geq M\|u\|$ para todo $u \in D(T)$. Demuestra que, entonces, T es un operador cerrado.

6. Sean $V, W \subset X$, subespacios cerrados de un espacio de Banach X. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $V + W$ es cerrado en X.

(b) $V^\perp + W^\perp$ es cerrado en X^*.

(c) $V + W = (V^\perp \cap W^\perp)^\perp$.

(d) $V^\perp + W^\perp = (V \cap W)^\perp$.

Nota: La identidad en (c) se entiende en sentido del mapeo canónico entre X y X^{**}.

7. Sea X un espacio de Banach. Una familia de operadores lineales y acotados en X, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $S(t) \in \mathcal{B}(X)$ para cada $t \geq 0$, es llamada un *semigrupo fuertemente continuo* (o simplemente un C_0-*semigrupo*) si se cumplen las siguientes propiedades:

(S_1) $S(0) = \mathrm{Id}$.

(S_2) $S(t)S(s) = S(t+s)$ para cualesquiera $s, t \geq 0$.

(S_3) Para cada $u \in X$ fijo el mapeo

$$S(t)u \,:\, [0,\infty) \to X, \qquad t \mapsto S(t)u,$$

es continuo de $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ en X.

Supongamos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es una familia de operadores en $\mathcal{B}(X)$, X espacio de Banach, que satisface las propiedades de semigrupo (S_1) y (S_2). Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo.

(b) $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$ para cualquier $u \in X$.

(c) Existen $\delta > 0$, $M \geq 1$ y un subconjunto denso $D \subset X$ tales que

(i) $\|S(t)\|_{X\to X} \leq M$ para todo $t \in [0,\delta]$,

(ii) $\lim_{t\to 0^+} S(t)u = u$ para todo $u \in D$.

Sugerencia: Puedes aplicar el teorema probado en clase (Teorema 1 del 11/09/2024) basado en el principio de acotamiento uniforme. Enuncia dicho teorema y aplícalo para demostrar que (c) $\Rightarrow$ (b), (b) $\Rightarrow$ (a) y (a) $\Rightarrow$ (c).

8. Sea X un espacio de Banach.

(a) Demuestra que una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converge débilmente a $u \in X$ ($u_n \rightharpoonup u$ si $n \to \infty$) si y sólo si $\{\|u_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbb{R}$ y $\ell(u_n) \to \ell(u)$ para todo $\ell \in S$, donde $S \subset X^*$ es un subconjunto del dual tal que $\operatorname{span}(S)$ es denso en X^*

(b) Demuestra que una sucesión $\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ converge débilmente-$*$ a un elemento $\ell \in X^*$ si y sólo si $\{\|\ell_n\|_*\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$ y $\ell_n(u) \to \ell(u)$ para todo $u \in D$, donde $D \subset X$ es un subconjunto tal que $\operatorname{span}(D)$ es denso en X.

9. Sea X un espacio de Banach separable. Demuestra que existe una sucesión

$$\{\ell_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \partial B_1^* = \{\ell \in X^* \,:\, \|\ell\|_* = 1\},$$

que *separa puntos en* X, es decir, si $u \in X$, $u \neq 0$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\ell_{n_0}(u) \neq 0$.

10. (a) Sea $1 < p < \infty$. Sea una sucesión $x_n = \left(x_n^{(j)}\right) = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, x_n^{(3)}, \dots\right)$ en ℓ_p para cada $n \in \mathbb{N}$. Demuestra que x_n converge débilmente en ℓ_p si y sólo si la sucesión $\{x_n\}$ es acotada y $x_n^{(j)} \to x^{(j)}$ cuando $n \to \infty$ para cada $j \in \mathbb{N}$.

(b) Sea la sucesión

$$x_n = \left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \dots\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

¿En cuál de los espacios ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$, es esta sucesión débilmente convergente?

Total: 10 pts.