Análisis Funcional

Semestre 2025-1

Tarea 1: Espacios de Banach y teoremas de Hahn-Banach

1. Sea u_n una sucesión convergente en un espacio normado X. Demuestra que las sucesiones

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \in X,$$
$$w_n = \frac{1}{n^2}(u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n) \in X, \qquad n \in \mathbb{N},$$

también son convergentes y encuentra sus respectivos límites.

2. Sea X un espacio normado. Dada una sucesión u_n en X se dice que la serie $\sum u_n$ converge a s en X si la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{j=1}^{n} u_j$ converge a $s \in X$ ($\|s_n - s\| \to 0$ cuando $n \to \infty$). Se dice que la serie $\sum u_n$ es *absolutamente convergente* si la sucesión $r_n = \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|$ converge en $\mathbb{R}$.

(a) Demuestra que X es un espacio de Banach si y sólo si toda serie absolutamente convergente converge en X.

(b) Demuestra que una serie absolutamente convergente en un espacio de Banach X también converge *incondicionalmente*, es decir, para toda permutación σ de los índices enteros la serie $\sum_{j=1}^{n} u_{\sigma(j)}$ converge al mismo límite cuando $n \to \infty$.

3. Sean X y Y dos espacios normados. Da un ejemplo de un operador lineal y acotado, $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, en el que $\operatorname{Ran}(T)$ no sea cerrado en Y. *Sugerencia:* Considera $X = Y = \ell_\infty$ sobre $\mathbb{R}$, $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$, $T(x) = y$, donde $y_j = x_j/j$, $j \in \mathbb{N}$, para todo $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell_\infty$. Muestra que T es lineal y acotado y que $\operatorname{Ran}(T)$ no es cerrado.

4. Sean X, Y espacios normados y $T : D(T) \subset X \to Y$ un operador lineal. Se define la norma de T como

$$\begin{aligned}\|T\|_{X\to Y} = \|T\| &:= \operatorname{ínf}\{M > 0 \,:\, \|Tu\|_Y \le M\|u\|_X,\ u \in D(T)\} \\ &\underset{\text{(a)}}{=} \sup_{\substack{u\in D(T)\\ u\neq 0}} \left\{\frac{\|Tu\|_Y}{\|u\|_X}\right\} \underset{\text{(b)}}{=} \sup_{\substack{u\in D(T)\\ \|u\|_X=1}} \left\{\|Tu\|_Y\right\} \underset{\text{(c)}}{=} \sup_{\substack{u\in D(T)\\ \|u\|_X\le 1}} \left\{\|Tu\|_Y\right\}.\end{aligned}$$

Prueba las igualdades (a), (b) y (c).

5. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Demuestra que:

(a) T es continuo si y sólo si $T^{-1}(B_1(0))$ tiene interior no vacío (aquí $B_1(0) = \{v \in Y \,:\, \|v\|_Y < 1\}$ denota a la bola unitaria en Y).

(b) T es no acotado si y sólo si existe una sucesión $u_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $\|u_n\|_X \to 0$ y $\|Tu_n\|_Y \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

6. Sean X, Y espacios normados y $T : X \to Y$ un operador lineal. Demuestra que $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ si y sólo si $u_n \rightharpoonup u$ en X (converge débilmente a u) implica que $T(u_n) \rightharpoonup T(u)$ en Y. *Nota:* en este ejercicio puedes usar (sin demostrar) el hecho de que una sucesión que converge débilmente es acotada (esto se probará más delante con Banach-Steinhaus).

7. Sean X un espacio normado sobre un campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, y ℓ un funcional lineal definido en X, $\ell : X \to \mathbb{K}$, con $D(\ell) = X$, y tal que $\ell \neq 0$ (no es el funcional idénticamente cero). Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) ℓ es continuo (es decir, $\ell \in X^*$)

(b) $\ker(\ell)$ es un subespacio cerrado *propio* de X.

(c) $\ker(\ell)$ no es denso en X.

8. Sea X un espacio real normado. Sea $K \subset X$ un subconjunto *convexo* de X con la propiedad de que, para todo $u \in X$, $u \neq 0$, existe un número real positivo $M(u) > 0$ tal que

$$\{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, \lambda u \in K\} = (-M(u), M(u)).$$

Sea $u_0 \in X \backslash K = K^c$. Prueba que existe un funcional lineal $\ell : X \to \mathbb{R}$ tal que $\ell(u_0) \geq 1$ y $\ell(u) < 1$ para todo $u \in K$.

9. Sea ℓ_1 el espacio de sucesiones reales $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $x_j \in \mathbb{R}$ $\forall j \in \mathbb{N}$, con norma $\|x\|_1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j| < \infty$. Sea ℓ_∞ el espacio de sucesiones reales acotadas $y = (y_1, y_2, \ldots)$ con norma $\|y\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} |y_j|$.

(a) Demuestra que ℓ_∞ es el dual de ℓ_1 (es decir, son espacios isomorfos, $\ell_\infty \cong \ell_1^*$).

(b) Demuestra que ℓ_1 no es el dual de ℓ_∞.

10. Demuestra que toda sucesión débilmente convergente en ℓ_1 es fuertemente convergente. (*Nota:* Ésta es una notable propiedad del espacio ℓ_1: convergencia débil $\Rightarrow$ convergencia fuerte.)

Total: 10 pts.