Calculamos el eigenvector para $\lambda_1 = -5$ resolviendo $\mathbf{CV}_1 = -5\mathbf{V}_1$. Si $\mathbf{V}_1 = (y_1, v_1)$, tenemos

$$\begin{cases} v_1 = -5y_1 \\ -10y_1 - 7v_1 = -5v_1. \end{cases}$$

Si hemos hecho nuestra aritmética de manera correcta, esas dos ecuaciones son redundantes y los eigenvectores buscados deben satisfacer a $v_1 = -5y_1$. (Es una buena idea verificar la redundancia de esas ecuaciones. Si no son redundantes, entonces cometimos un error antes en el cálculo.) Haciendo $y_1 = 1$, obtenemos el eigenvector $\mathbf{V}_1 = (1, -5)$ correspondiente a λ_1. Del mismo modo, podemos calcular que un eigenvector para $\lambda_2 = -2$ es $\mathbf{V}_2 = (1, -2)$. (¿Nota algo especial acerca de esos dos eigenvectores?)

La solución general para este sistema es

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-5t} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} + k_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Con esta fórmula podemos encontrar la posición exacta del oscilador en cualquier tiempo. Y a partir de ella también es posible determinar las características cualitativas del modelo. Cada término en la expresión para $\mathbf{Y}(t)$ contiene un exponencial de la forma $e^{\lambda t}$ con $\lambda < 0$. En consecuencia, cada término tiende a 0 conforme t crece. Observe que esto es consistente con las direcciones de las curvas solución en el retrato fase (vea la figura 3.11), y es gratificante ver que todo se ajusta tan precisamente. Como $\mathbf{Y}(t) = (y(t), v(t))$, la solución general de la correspondiente ecuación de segundo orden es la primera componente de $\mathbf{Y}(t)$, que es

$$y(t) = k_1 e^{-5t} + k_2 e^{-2t}.$$

Algo que aprendimos de los eigenvalores que no sabíamos sólo del retrato fase es el hecho de que cada solución tiende a cero a una razón, que es por lo menos comparable a la razón a la que e^{-2t} tiende a 0.

EJERCICIOS PARA LA SECCIÓN 3.2

En los ejercicios 1-10,

(a) calcule los eigenvalores;

(b) para cada eigenvalor, determine los eigenvectores asociados;

(c) usando cualquier procedimiento disponible, esboce el campo de direcciones para el sistema y practique las soluciones de línea recta;

(d) para cada eigenvalor, especifique la solución de línea recta que corresponde y trace sus gráficas $x(t)$ y $y(t)$; y

(e) si el sistema tiene dos eigenvalores distintos, calcule la solución general.

1. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

2. $\dfrac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}$

3. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

4. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5. $$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = x - \frac{y}{2}$$

6. $$\frac{dx}{dt} = 5x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = 9x$$

7. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

8. $$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

9. $$\frac{dx}{dt} = 2x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = x + y$$

10. $$\frac{dx}{dt} = -x - 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 4y$$

11. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = -3x$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + 2y,$$

donde la condición inicial $(x(0), y(0))$ es:

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(0, 1)$ **(c)** $(-2, 1)$

12. Solucione el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 3x$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y,$$

donde la condición inicial $(x(0), y(0))$ es:

(a) $(1, 0)$ **(b)** $(0, 1)$ **(c)** $(2, 2)$

13. Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

donde la condición inicial $\mathbf{Y}_0$ es:

(a) $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$ **(b)** $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$ **(c)** $\mathbf{Y}_0 = (-1, -2)$

14. Solucione el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{Y}, \quad \mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0,$$

donde la condición inicial $\mathbf{Y}_0$ es:

(a) $\mathbf{Y}_0 = (1, 0)$ **(b)** $\mathbf{Y}_0 = (2, 1)$ **(c)** $\mathbf{Y}_0 = (-1, -2)$

15. Demuestre que a es el único eigenvalor y que cada vector es un eigenvector para la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

16. Una matriz de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

se denomina **triangular superior**. Suponga que $b \neq 0$ y $a \neq d$. Encuentre los eigenvalores y eigenvectores de **A.**

17. Una matriz de la forma

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$$

se llama **simétrica**. Demuestre que **B** tiene eigenvalores reales y que, si $b \neq 0$, entonces **B** tiene dos eigenvalores distintos.

18. Calcule los eigenvalores de una matriz de la forma

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Compare sus resultados con los del ejercicio 16.

19. Considere la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0,$$

donde p y q son positivos.

(a) Convierta esta ecuación en un sistema lineal de primer orden.

(b) Calcule el polinomio característico del sistema.

(c) Encuentre los eigenvalores.

(d) ¿Bajo qué condiciones para p y q los eigenvalores son dos números reales distintos?

(e) Compruebe que los eigenvalores son negativos cuando son números reales.

20. Para el oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 4$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 5$,

(a) calcule los eigenvalores y los eigenvectores asociados;

(b) para cada eigenvalor, escoja un eigenvector asociado $\mathbf{V}$ y determine la solución $\mathbf{Y}(t)$ con $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{V}$;

(c) para cada solución obtenida en el inciso (b), trace su curva solución en el plano fase y-v;

(d) también con las soluciones del inciso (b), trace sus gráficas $y(t)$ y $v(t)$; y

(e) para cada solución que obtuvo en el inciso (b), dé una breve descripción del comportamiento del sistema masa-resorte.

En los ejercicios 21-24, volvemos a los ejercicios 13-16 de la sección 2.3. (Por conveniencia, a continuación reproducimos las ecuaciones.) Para cada ecuación de segundo orden,

(a) convierta la ecuación a un sistema lineal de primer orden;

(b) calcule los eigenvalores y eigenvectores del sistema;

(c) para cada eigenvalor, escoja un eigenvector asociado $\mathbf{V}$ y determine la solución $\mathbf{Y}(t)$ del sistema; y

(d) compare los resultados de sus cálculos del inciso (c) con los que obtuvo al usar el método de conjetura y prueba en la sección 2.3.

21. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} - 10y = 0$

22. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3\dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$

23. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4\dfrac{dy}{dt} + y = 0$

24. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 5\dfrac{dy}{dt} + 6y = 0$

25. Verifique que el sistema lineal que modela al oscilador armónico con masa $m = 1$, constante de resorte $k = 4$ y coeficiente de amortiguamiento $b = 1$, no tiene eigenvalores reales. ¿Esto le dice algo acerca del retrato fase del sistema?

3.3 PLANOS FASE PARA SISTEMAS LINEALES CON EIGENVALORES REALES

En la sección anterior vimos que las soluciones de línea recta juegan un papel dominante cuando determinamos la solución general de ciertos sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. En primera instancia, usamos el álgebra para calcular los eigenvalores (reales) y eigenvectores (asociados) de la matriz de coeficientes, y con ellos podemos escribir la correspondiente solución de línea recta. Además, en el caso especial en que encontramos dos eigenvalores reales distintos, podemos escribir una fórmula explícita para el sistema.

El signo del eigenvalor también es preponderante para predecir el comportamiento de las correspondientes soluciones de línea recta. Si el eigenvalor es negativo, la solución tiende al origen cuando $t \to \infty$; si es positivo, la solución se aleja del origen cuando $t \to \infty$. En esta sección, a partir del comportamiento de esas soluciones de línea recta, predeciremos el de todas las soluciones.

Puntos silla

Un tipo común de sistema lineal contiene un eigenvalor positivo y otro negativo. Por ejemplo, considere el sistema lineal

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} = \mathbf{AY}, \qquad \text{donde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Éste es un sistema lineal particularmente simple, ya que corresponde a las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -3x \\ \frac{dy}{dt} &= 2y. \end{aligned}$$

Note que dx/dt depende sólo de x y dy/dt depende sólo de y. Es decir, el sistema está completamente desacoplado. Podemos resolver esas dos ecuaciones en forma independiente usando los métodos del capítulo 1. Sin embargo, para entender la geometría más plenamente, utilizaremos los métodos de las dos secciones previas.

Como siempre, calculamos primero los eigenvalores de $\mathbf{A}$ encontrando las raíces del polinomio característico

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (-3-\lambda)(2-\lambda) = 0.$$

Los eigenvalores de $\mathbf{A}$ son entonces $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$.

A continuación obtenemos los eigenvectores. Para $\lambda_1 = -3$, debemos despejar $\mathbf{V}$ de la ecuación $\mathbf{AV} = -3\mathbf{V}$. Si $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)$, tenemos

$$\left\{ \begin{aligned} -3x_1 &= -3x_1 \\ 2y_1 &= -3y_1. \end{aligned} \right.$$

Entonces, cualquier vector no cero $\mathbf{V}$ que esté a lo largo de la línea $y = 0$ (el eje x) en el plano, es un eigenvector para $\lambda_1 = -3$. Escogemos $\mathbf{V}_1 = (1, 0)$. Por tanto,

$$\mathbf{Y}_1(t) = e^{-3t}\mathbf{V}_1$$

es una solución de línea recta cuya curva es el eje x positivo. La solución tiende al origen cuando t crece.

De manera similar, podemos comprobar que cualquier eigenvector correspondiente a $\lambda_2 = 2$ se encuentra a lo largo del eje y. Escogemos $\mathbf{V}_2 = (0, 1)$ y obtenemos una segunda solución

$$\mathbf{Y}_2(t) = e^{2t}\mathbf{V}_2.$$

La solución general es por consiguiente

$$\mathbf{Y}(t) = k_1 e^{-3t}\mathbf{V}_1 + k_2 e^{2t}\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} k_1 e^{-3t} \\ k_2 e^{2t} \end{pmatrix}.$$