Tarea 5 de Ecuaciones diferenciales parciales I

1. Considere la ecuación biarmónica $\nabla^2\nabla^2 u = 0$ en el plano, donde $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Las condiciones de frontera de la ecuación biarmónica son $u = g(x,y)$ y $\frac{\partial u}{\partial n} = h(x,y)$, donde (x,y) pertenece a la frontera del dominio.

   Llamamos función armónica a una función que cumple la ecuación de Laplace en el dominio, $\nabla^2 u = 0$.

   a) Muestre que si u_1 y u_2 son funciones armónicas en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, entonces
   $$\nabla^2\nabla^2(xu_1 + u_2) = 0$$
   y también, que
   $$\nabla^2\nabla^2\left((r^2 - r_0^2)u_1 + u_2\right) = 0$$
   donde $r^2 = x^2 + y^2$.

   b) Considere la ecuación biarmónica en el círculo de radio r_0 y con condiciones de frontera $u(r_0,\theta) = g(\theta)$ y $\frac{\partial u}{\partial r}(r_0,\theta) = h(\theta)$. Considere la solución $u = (r^2 - r_0^2)u_1 + u_2$ donde u_1 y u_2 son como se han descrito en el párrafo anterior.

   1) Muestre que $u_2|_{r=r_0} = g$ y $2r_0u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}|_{r=r_0} = h$.
   2) Muestre que $2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r}$ es solución de la ecuación de Laplace en el círculo de radio r_0.
   3) Si $\nabla^2 u_2 = 0$ y $u_2 = g$ en la frontera, escriba u_2 utilizando la fórmula de Poisson.
   4) Si $\nabla^2(2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r}) = 0$ y $2r_0u_1 + \frac{\partial u_2}{\partial r}|_{r=r_0} = h$, entonces escriba a $2r_0u_1 + \frac{r}{r_0}\frac{\partial u_2}{\partial r}$ utilizando la fórmula de Poisson.
   5) Derive u_2 del inciso (iii) respecto a r y subtituya $\frac{\partial u_2}{\partial r}$ en (iv). De esta forma muestre que la solución de la ecuación biarmónica en el círculo de radio r_0 se escribe como:

   $$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi r_0}(r^2 - r_0^2)^2 \left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{-h(\varphi)d\varphi}{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\theta)}d\varphi \right.$$
   $$\left. + \int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)[r_0 - r\cos(\varphi-\theta)]}{[r^2 - r_0^2 - 2rr_0\cos(\varphi-\theta)]^2}d\varphi\right]$$

2. Considere la ecuación biarmónica definida sobre un rectánculo de lados $2a$ y $2b$ y el centro del rectángulo esta en el origen. Las condiciones de frontera son $u = 0$ en todas los lados del rectángulo salvo el lado inferior del rectángulo donde $u(x,-b) = f(x)$ para $-a < x < a$, y $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en el rectángulo.

   Utilizando la transformada de Fourier encuentre la solución de esta ecuación.

3. Considere el problema siguiente:

$$\nabla^2 u(x,y) + k^2 u(x,y) = 0 \qquad x \in [0,1]\ ,\ y \in [0,1]$$

con las condiciones de frontera tales que $u = 0$ en los lados inferior, derecho e izquierdo del cuadrado que representa la frontera y $u(x,1) = f(x)$ en el lado superior del cuadrado donde $f(0) = f(1) = 0$.

Utilizando el método de serparación de variables encuentre la solución del problema.