Tarea 4, Ecuaciones Diferenciales Parciales I

1. Resuelva la ecuación de Laplace, $\nabla^2 u = 0$ en un cilindro de altura H y radio a. Las condiciones de frontera del problema son las siguientes:

$$u(r,\theta,0) = 0 \qquad 0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u(r,\theta,H) = \beta(r,\theta) \qquad 0 \leq r \leq a \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

$$u(a,\theta,z) = 0 \qquad 0 \leq \theta < 2\pi \quad 0 \leq z \leq H$$

   a) Desarrolle el Laplaciano en coordenadas cilíndricas.

   b) Usando separación de variables, encuentre las ecuaciones diferenciales para r, θ y z.

   c) Encuentre la solución $u(r,\theta,z)$.

2. Considere la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$.

   a) Escriba la ecuación de Laplace en coordenadas esfericas.

   b) Proponiendo la separación de variables:

$$u(r,\theta,\varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\varphi)$$

   siendo θ el ángulo de latitud y φ el de longitud, muestre que la ecuación de Laplace se reduce a las siguientes ecuaciones ordinarias:

$$\frac{1}{Q(\varphi)} \frac{d^2 Q(\varphi)}{d\varphi^2} = -m^2$$

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U(r) = 0$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \frac{d}{d\theta} \left(\operatorname{sen}(\theta) \frac{dP(\theta)}{\theta} \right) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\operatorname{sen}(\theta)} \right] P(\theta) = 0$$

   Las soluciones de $P(\theta)$ son los polinomios de Legendre asociados. Si $m = 0$, la solución está dada por los polinomios de Legendre.

c) Describa brevemente las propiedades de los polinomios de Legendre.

3. Considere la ecuación de Laplace con la siguientes condiciones de frontera:

$$u(r,\theta,\varphi) = V \quad \text{si} \quad r = a \quad , \quad 0 \leq \theta < \tfrac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$u(r,\theta,\varphi) = -V \quad \text{si} \quad r = a \quad , \quad \tfrac{\pi}{2} < \theta \leq \pi \quad \text{y} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

a) Muestre que en el eje z positivo, la función u está dada por:

$$u(0,0,z) = V\left[1 - \frac{(z^2 - a^2)}{z\sqrt{z^2 + a^2}}\right] \qquad \text{con} \quad z > 0$$

b) Muestre que la solución se puede escribir como:

$$u(r,\theta,\varphi) = V\left[\frac{3}{2}\frac{r}{a}P_1(\cos(\theta)) - \frac{7}{8}(\frac{r}{a})^3 P_3(\cos(\theta)) + \frac{11}{16}(\frac{r}{a})^5 P_5(\cos(\theta))\ldots\right]$$