

# Apuntes de Ecuaciones en Derivadas Parciales

Dr. Antonmaria Minzoni



*A Angela, Sofia y Delia*



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>IX</b>
<b>Introducción</b>	<b>XI</b>
<b>1. Ecuaciones hiperbólicas</b>	<b>1</b>
1.1. La ecuación lineal de primer orden . . . . .	1
1.2. Geometría de las características . . . . .	8
1.3. Solución de ecuaciones parciales de primer orden por el método de las características . . . . .	12
1.4. Unicidad y discusión de las soluciones de la ecuación de primer orden . . . . .	15
1.5. Ecuación lineal de segundo orden con características . . . . .	18
1.6. Método de imágenes de las características . . . . .	28
1.7. Condiciones de frontera en la velocidad . . . . .	31
1.8. Unicidad de las soluciones para la ecuación de onda . . . . .	34
<b>2. Sistemas de ecuaciones con características</b>	<b>39</b>
2.1. El problema de las líneas de transmisión . . . . .	39
2.2. La ecuación del telegrafista . . . . .	43
2.3. Propagación de ondas en agua . . . . .	47
2.4. Las ecuaciones de Maxwell . . . . .	53
2.4.1. Generación de una onda plana . . . . .	57
<b>3. Ecuaciones elípticas</b>	<b>65</b>
3.1. Introducción y algunos problemas típicos . . . . .	65
3.1.1. Ecuación de una membrana elástica en equilibrio . . . . .	65
3.1.2. Ecuaciones elípticas en mecánica de fluidos y en electrostática . . . . .	71
3.2. Soluciones a algunos problemas elípticos . . . . .	74
3.2.1. Problemas de Dirichlet . . . . .	74
3.2.2. Método de separación de variables . . . . .	77
3.2.3. La fórmula de Poisson . . . . .	81
3.2.4. Problema de Neumann . . . . .	83

3.2.5. El principio del máximo para la ecuación de Laplace . . . . .	84
3.2.6. El problema del tambor . . . . .	86
3.2.7. Problemas elípticos en dominios no acotados y transformadas integrales . . . . .	92
3.2.8. Problema de difracción . . . . .	95
<b>4. Funciones de Green</b>	<b>101</b>
4.1. El problema de la ecuación de Laplace en una dimensión . . . . .	102
4.2. Función impulso-respuesta . . . . .	105
4.3. Método de imágenes . . . . .	107
4.4. Función de Green . . . . .	112
4.5. Funciones de Green para fronteras particulares . . . . .	116
4.5.1. Fórmula de Green y de Poisson . . . . .	119
4.6. Fórmula de Green para la ecuación de Helmholtz . . . . .	121
<b>5. Separación de variables para ecuaciones</b>	<b>123</b>
5.1. Separación de variables para la ecuación . . . . .	123
5.2. Separación de variables para un sistema de ecuaciones . . . . .	130
5.3. La transformada de Laplace . . . . .	131
<b>6. Ecuación de onda en tres dimensiones</b>	<b>137</b>
6.1. Propagación de ondas sonoras . . . . .	137
6.2. La fórmula de Poisson y su interpretación . . . . .	140
6.3. Aplicaciones de la fórmula de Poisson . . . . .	141
6.4. El problema con valores iniciales . . . . .	147
<b>7. Ecuación de difusión</b>	<b>153</b>
7.1. Propagación de calor . . . . .	153
7.2. Dispersión de contaminantes . . . . .	155
7.3. El efecto de las fuentes . . . . .	156
7.4. Tipos de ecuación de calor lineales . . . . .	157
7.5. Resolución de la ecuación de calor en dominios acotados . . . . .	160
7.6. Resolución de la ecuación de calor en dominios no acotados . . . . .	163
7.7. Unicidad de la solución de la ecuación de calor . . . . .	165
7.8. Ecuación de calor con transporte y fuentes en dominios no acotados .	166
7.9. Resolución de la ecuación de calor en dominios no acotados usando la transformada de Laplace . . . . .	169
7.10. Ecuación de calor en dimensiones superiores . . . . .	172
7.11. Funciones tipo Green en dominios acotados . . . . .	172
<b>Apéndice A</b>	
<b>Transformada de Fourier</b>	<b>175</b>

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	VII
<b>Apéndice B</b>	
Transformada de Laplace	<b>181</b>
<b>Notas</b>	<b>185</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>187</b>



# Agradecimientos

Quiero agradecer a Mari Carmen Jorge por la reedición de estas notas y su mejora en muchos aspectos.

Agradezco también a Marco Antonio Iglesias por su reescritura y mejoramiento sustancial de las figuras y de la presentación. Agradezco las múltiples mejoras que Gilberto Flores y Ma. del Carmen Jorge hicieron a esta nueva versión de las notas, al usarlas como material de apoyo en sus cursos de la Facultad de Ciencias.

El Apéndice de Funciones de Green que completa esta presentación fue escrito por Arturo Olvera.

Agradezco a todos mis colegas del Departamento de Matemáticas y Mecánica las numerosas sugerencias que han enriquecido este trabajo. Finalmente a Alma Rodríguez y Ana Pérez mi agradecimiento por los últimos toques a esta edición.



# Introducción

El propósito de estas notas es el de presentar algunos temas de la teoría clásica elemental de las ecuaciones en derivadas parciales. Sobre este tema hay una gran cantidad de libros que cubren gran parte del material de estas notas; por mencionar algunos tenemos el de Weinberger, John, Petrovski, Copson, donde el lector interesado podrá consultar muchos de los temas tratados en estas notas.

El material aquí tratado difiere del de los textos arriba mencionados, ya que en ellos se tratan, en forma elemental, algunos temas como sistemas hiperbólicos, ecuaciones de Maxwell, fórmulas de Poisson para la ecuación de onda, así como aplicaciones que usualmente se tratan en cursos más avanzados.

En el primer capítulo se discute la ecuación lineal de primer orden, y se resuelve usando el método de las características. Se discute con detalle la geometría de las características y maneras alternativas de operar con ellas; las aplicaciones con el flujo de coches por una carretera. Se omite el problema de ecuaciones no lineales; para estos problemas se proporciona al lector la literatura, sin embargo se le invita al lector a examinar el capítulo XX de libro de Richard Haberman para tener una visión más adecuada de algunos de las ecuaciones no lineales más utilizadas en la Física y en la Biología [?]. Se discute con detalle la ecuación lineal de segundo orden con características (la ecuación de propagación de ondas), y los varios problemas con valores iniciales y de frontera asociados con ella. Se da una interpretación detallada del papel de las características en cada caso. Finalmente se discute la unicidad de las soluciones para la ecuación de onda.

En el segundo capítulo se discuten algunos sistemas hiperbólicos simples, utilizando ejemplos de líneas de transmisión eléctricas y propagación de ondas en agua. Aquí también se discute con cierto detalle el papel de las características. Finalmente se resumen los experimentos que llevaron a las ecuaciones de Maxwell y se discuten éstos con cierto detalle en casos simples. Nuevamente los problemas se resuelven usando el método de las características.

El tercer capítulo trata del tipo opuesto de ecuaciones a las tratadas en los primeros dos. Se trata de ecuaciones de equilibrio que no propagan señales. Se introducen al

estudiar las deflexiones de una membrana bajo la acción de su propio peso, así como también a través de problemas de fluidos, el estudio de las vibraciones del tambor y como aproximaciones a las ecuaciones de Maxwell en electrostática. Para su solución se introduce la técnica de separación de variables y las series de Fourier. Se discuten varios problemas simples de valores en la frontera.

Finalmente se discuten problemas en regiones infinitas; en particular el problema de difracción de una onda periódica por un obstáculo, ilustrando esto la separación de variables en regiones infinitas.

En el capítulo cinco se estudia la ecuación de propagación de ondas en tres dimensiones. Se introduce como una aproximación a las ecuaciones de Navier Stokes (las ecuaciones de la mecánica de fluidos) cuando los movimientos son pequeños, como en el caso de ondas sonoras. Se resuelve la ecuación en términos de una integral usando una combinación de transformadas de Laplace y Fourier. Se obtiene la fórmula de Poisson la cuál se interpreta con detalle y se aplica en varias situaciones de acústica y de sismología. Se estudian varias aproximaciones y se discuten las dificultades geométricas que hay para obtener información a partir de la fórmula de Poisson.

Esta nueva edición se completó añadiendo un capítulo sobre ecuaciones de difusión y convección. Se añadió también una sección escrita por Arturo Olvera sobre Funciones de Green y construcción e interpretación en teoría del potencial.

Estas adiciones permiten usar estas notas en un primer curso de Ecuaciones Parciales. Un libro que continúa con este tipo de material es el libro reciente de Richard Haberman.

Para concluir, reconocemos haber omitido temas de importancia, como la ecuación de propagación del calor; tampoco se desarrolló detalladamente la técnica de separación de variables en problemas más complicados.

Otros temas de gran utilidad como el estudio de soluciones analíticas aproximadas y óptica geométrica, se omitieron completamente. Para éstos el lector podrá consultar la literatura que señalamos aquí.

A lo largo de estas notas se ha tomado el punto de vista de resolver problemas razonando en forma geométrica o por analogía con otros problemas. Las soluciones formales obtenidas así probaron ser soluciones de los problemas cuando se satisfacen condiciones técnicas apropiadas que justificaban el método seguido para obtener la solución formal. Deliberadamente se omiten los detalles técnicos, dando así la flexibilidad de usar los métodos para gran cantidad de problemas, verificando a posteriori la solución obtenida. La finalidad de esta manera de presentar el material es que el lector se familiarice con los problemas más simples de las ecuaciones parciales y con las técnicas para obtener y discutir soluciones.

Gran parte del material de estas notas se obtuvo en los cursos de verano en Morelia,

Mich. en 1977 y en Mérida, Yuc., en 1978.

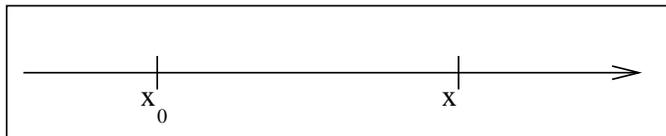


# Capítulo 1

## Ecuaciones hiperbólicas

### 1.1. La ecuación lineal de primer orden

Se empezará esta sección introduciendo la ecuación lineal de primer orden con un ejemplo: el tránsito de coches por una carretera. Se supone para esto una carretera recta a lo largo del eje  $x$  tal como se ve en la figura siguiente:



*Fig. 1.1*

En esta carretera existe un límite de velocidad máxima y los coches siempre tratan de alcanzar la máxima velocidad sin superar el límite de velocidad. Aunque los coches son elementos discretos, cuando observamos la carretera a cierta distancia el conjunto de coches aparentar ser un continuo, como si fuera un fluido de tal manera que podemos utilizar por analogía algunos conceptos propios de la Física de los medios continuos como son la densidad, flujo, etc. Representemos por  $\rho(x, t)$  la densidad de coches en el punto  $x$  de la carretera al tiempo  $t$ ; el problema es encontrar el comportamiento de

$\rho(x, t)$  (el tráfico en la carretera) a tiempos futuros, si es que se conoce  $\rho(x, 0)$ ; es decir el tráfico inicialmente. Para esto debemos encontrar una ecuación para  $\rho$ . Como esta función depende de dos variables, la ecuación que encontraremos será una ecuación diferencial parcial. La ecuación deseada la encontramos considerando la rapidez de cambio de la cantidad de coches entre  $x_0$  y  $x$ . Esto es:

Rapidez de cambio del número de coches entre  $x_0$  y  $x = \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi$ .

Por otra parte sabemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi &= \text{Número de coches que entran en } x_0 \text{ por unidad de tiempo} \\ &\quad - \text{Número de coches que salen por } x \text{ por unidad de tiempo} \\ &= \text{Flujo de coches que entra} - \text{Flujo de coches que sale.} \end{aligned}$$

Si denotamos el flujo mediante  $Q$ , tendremos que la ecuación de conservación de la cantidad de coches es:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(x_0, t) - Q(x, t). \quad (1.1)$$

La ecuación (1.1) es una ecuación con dos incógnitas  $Q$  y  $\rho$ . Sin embargo es un hecho experimental (lo comprobamos siempre que viajamos con tráfico) que el flujo de coches, en un punto, depende de la densidad  $\rho$  en ese punto. Esta dependencia se encuentra experimentalmente, y una gráfica típica de  $Q(\rho)$  se muestra en la Fig. 1.2.

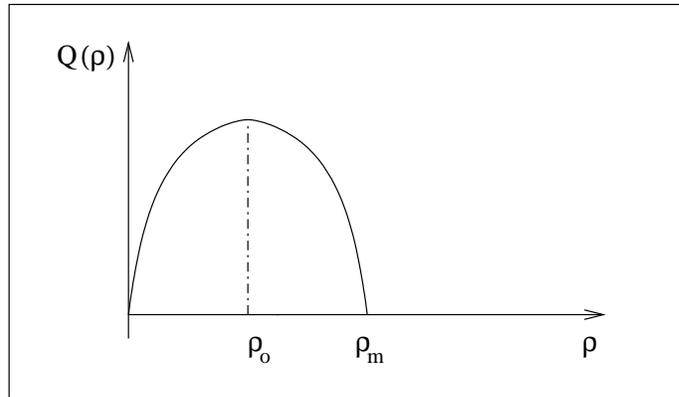


Fig. 1.2

La Fig. 1.2 nos indica que hay una densidad  $\rho_M$  para la cual ya no pasan coches (un embotellamiento) y una densidad  $\rho_0$  para la cual el flujo de coches es máximo.

La ecuación para  $\rho$  se encuentra pues sustituyendo  $Q(\rho)$  en la (1.1) y es

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x \rho(\xi, t) d\xi = Q(\rho(x_0, t)) - Q(\rho(x, t)). \quad (1.2)$$

La ecuación (1.2) es integrodiferencial. Para encontrar una ecuación diferencial para  $\rho$  es conveniente derivar respecto a  $x$  ambos miembros de (1.2) y obtener:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}Q(\rho(x, t)) = \rho_t + Q'(\rho)\rho_x = 0. \quad (1.3)$$

Para completar la formulación del problema, nos basta decir la disposición de coches en la carretera al tiempo  $t = 0$ ; es decir, especificar  $\rho(x, 0) = f(x)$  donde  $f(x)$  es una función conocida. Para encontrar la distribución de coches debemos resolver

$$\begin{aligned} \rho_t + Q'(\rho)\rho_x &= 0, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= f(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Donde la función  $Q$  se determina experimentalmente y tiene una forma parecida a la de la Fig. 1.2.

Resolver la ecuación (1.4) es complicado y como primer paso trataremos de resolverla cuando  $\rho \ll 1$  (no hay la posibilidad de embotellamiento que compliquen la solución del problema). En este caso podemos aproximar  $Q(\rho)$  como una función lineal  $Q(\rho) = Q'(0)\rho$ . Así, (1.4) se aproxima por

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ \rho(x, 0) &= f(x), \\ c &= Q'(0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Para bajas densidades, debemos resolver (1.5) para encontrar el tráfico en la carretera. Dicha solución se obtiene notando que la ecuación (1.5) se escribe en la forma siguiente:

$$(\rho_x, \rho_t) \bullet (c, 1) = 0 \quad (1.6)$$

que nos dice que  $\rho$  tiene la derivada direccional cero a lo largo del vector  $(c, 1)$ . Es decir  $\rho = cte.$  sobre las rectas paralelas a  $(c, 1)$ . Una manera diferente de escribir (1.6) es

$$\rho_t + c\rho_x = \frac{d}{dt}\rho(x(t), t) = 0 \quad \text{donde} \quad \frac{dx(t)}{dt} = c.$$

Utilizando estos hechos podemos construir la solución de (1.5) así:

- i) Sabemos que  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de las rectas  $\frac{dx}{dt} = c$ , es decir a lo largo de la familia de rectas  $x = ct + \xi$ . Por esto dibujamos la familia de rectas y tenemos la Fig. 1.3.

Observemos que para cada punto  $P = (x, t)$  pasa una y sólo una recta de la familia. Además las rectas  $x = ct + \xi$  intersectan al eje  $x$  en los puntos  $(\xi, 0)$ .

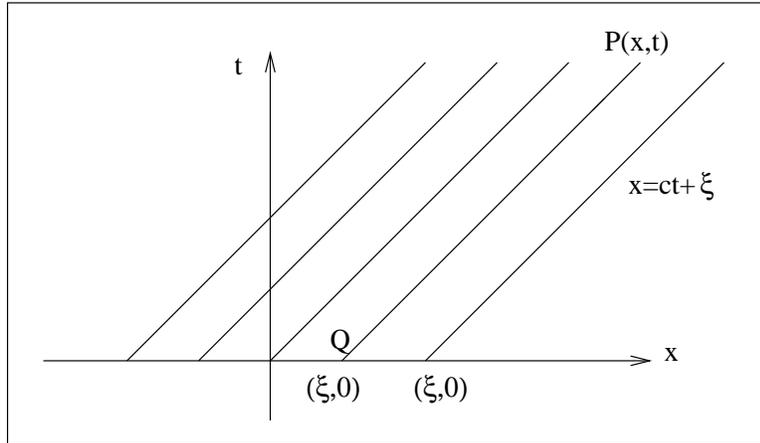


Fig. 1.3

- ii) Sabemos que  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de  $x = ct + \xi$ , por esto en la Fig. 1.3 el valor de  $\rho$  en  $P$  es el valor de  $\rho$  en  $Q$ . Por esto, para determinar  $\rho(x, t)$  basta ver cuál es el punto  $Q = (\xi, 0)$  donde la recta  $QP$  interseca el eje  $x$  y decir

$$\rho(x, t) = \rho(\xi, 0).$$

El valor de  $\rho(\xi, 0)$  se conoce ya que es la condición inicial  $f(\xi)$ . Para completar nuestra solución nos falta expresar  $\xi$  en términos de  $x$  y  $t$ . Esto se hace en la Fig. 1.3 y tendremos la solución

$$\rho(x, t) = f(x - ct). \quad (1.7)$$

Se puede verificar que (1.7) es efectivamente solución de (1.5) por sustitución directa. La interpretación de la solución en términos de tráfico la podemos obtener si graficamos (1.7) como función de  $x$  para dos tiempos diferentes como se ve en la Fig. 1.4.

Veamos que la gráfica de  $\rho$  al tiempo  $t_0$  es la gráfica  $\rho$  al tiempo  $t = 0$  desplazada hacia la izquierda una distancia  $ct_0$  sin cambiar de forma. Esto nos dice que el tráfico se moverá hacia la derecha con velocidad  $c$  sin cambiar la disposición de los coches. Esto se observa comúnmente, ya que cuando no hay embotellamientos un grupo de coches se desplaza en bloque sin cambiar apreciablemente de forma. La solución así construida está pues de acuerdo con nuestra experiencia.

Antes de resolver otros problemas notemos algunos detalles del método de solución de (1.5). De la Fig. 1.3 vemos que la solución es constante a lo largo de ciertas rectas que sólo dependen de la ecuación (a través de  $c$ ) y no de la  $f(x)$ . Estas rectas se llaman las

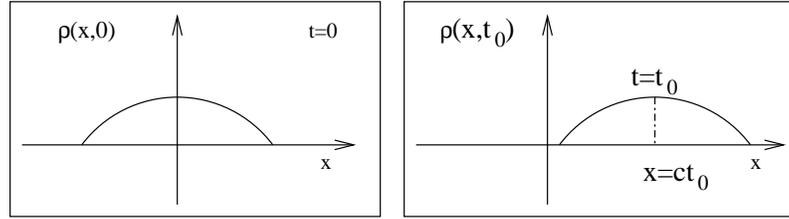


Fig. 1.4

**características** de la ecuación (1.7). A lo largo de las características vemos siempre el mismo valor de  $f$ . Finalmente el valor de  $\rho$  en  $P$  sólo depende del valor inicial en  $Q$ , por este motivo cambios en los valores iniciales en puntos distintos de  $Q$  no alteran  $\rho$  en  $P$ .

Otro problema de interés es aquél en el cual la carretera se extiende en el intervalo  $0 \leq x < \infty$  y no hay coches inicialmente; pero en el extremo  $x = 0$  están entrando coches con una densidad  $\rho(0, t) = g(t)$  que es una función conocida. Interesa también conocer la distribución de coches a lo largo de la carretera. El problema a resolver es

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, & 0 \leq x < \infty, t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, & 0 \leq x < \infty, \\ \rho(0, t) &= g(t), & t \geq 0, \quad g(t) = 0 \quad t \leq 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Para resolver (1.8) procedemos como en (1.5) y vemos que  $\rho$  es constante a lo largo de la familia de rectas  $x = ct + \xi$  que se ven en la Fig. 1.5.

En la Fig. 1.5 vemos que si  $P$  está a la derecha de la recta  $AB$  ( $x = ct$ )  $\rho = 0$ , ya que el valor de  $\rho$  en  $P$  es el valor de  $\rho$ , donde la característica  $PQ$  corta el eje  $x$  y el valor de  $\rho$  ahí es cero. Esto está de acuerdo con el hecho de que si tenemos un observador en  $x_0$ , éste no vería ningún coche hasta que el tiempo alcance el valor  $t > x_0/c$ , donde  $x_0/c$  corresponde al tiempo que tarda en llegar el primer coche que salió de  $x = 0$  al tiempo  $t = 0$ . De la Fig. 1.5 podemos verificar este hecho, ya que en  $x = x_0$ ,  $\rho = 0$  si  $t < x_0/c$ . Por otro parte, si  $x < ct$ , es decir arriba de la recta  $AB$ ,  $\rho$  será diferente de cero. Para calcular el valor de  $\rho$  en  $R$  mostrado en la Fig. 1.5, basta recordar que

$$\rho(x, t) = \rho(0, \tau) = g(\tau), \quad (1.9)$$

donde  $(0, \tau)$  es el punto donde la característica  $RS$  intersecta al eje  $t$ . Para recordar el valor de  $\tau$  basta notar que

$$0 = c\tau + \xi, \quad \xi = -c\tau,$$

donde

$$x = ct - c\tau, \quad \tau = t - x/c. \quad (1.10)$$

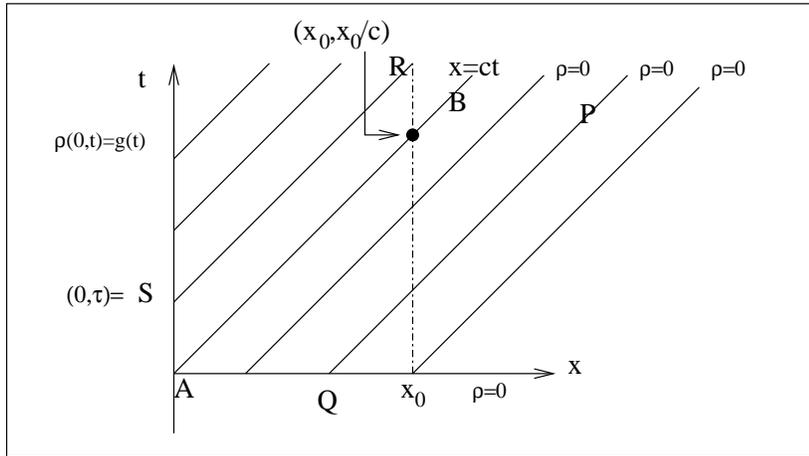


Fig. 1.5

En (1.9) y (1.10) vemos que la solución de (1.8) está dada por

$$\rho(x, t) = g(t - x/c). \quad (1.11)$$

Podemos ahora interpretar la ecuación (1.11) de esta forma: en un punto fijo  $x_0$  tenemos que  $\rho(x_0, t) = g(t - x_0/c)$  por esto si  $t < x_0/c$ ,  $\rho = 0$ . Cuando  $t > x_0/c$  la densidad que observamos es la misma distribución  $g(t)$  que está entrando en  $x = 0$ , claro está retrasada un tiempo  $x_0/c$ . Esto está de acuerdo con el hecho que un observador parado en la calle ve llegar a los coches, cuando hay pocos, con la misma disposición con la que entraron a la calle. En este caso vemos también que los valores de  $\rho$  se propagan a velocidad constante a lo largo de las características.

Tanto en la Fig. 1.5 como en la Fig. 1.3 vemos que  $\rho(x, t)$  sólo depende de los valores  $\rho(0, \tau)$  ó  $\rho(\xi, 0)$  que son los valores de  $\rho$ , donde la característica a través de  $P$  corta al eje con los datos iniciales o de frontera. Estos puntos  $(0, \tau)$ ,  $(\xi, 0)$  se llaman **dominio de dependencia** de  $(x, t)$ . Los puntos a lo largo de la característica  $x = ct + \xi$ , como llevan el valor  $\rho(\xi, 0)$ , se llaman **región de influencia** del punto  $(\xi, 0)$ .

Queda como ejercicio resolver los problemas

**Problema 1.1.1** Resolver

$$\begin{aligned} \rho_t - c\rho_x &= 0, & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= f(x). \end{aligned}$$

**Problema 1.1.2** Resolver

$$\begin{aligned} \rho_t - c\rho_x &= 0, & -\infty < x \leq 0, & t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, & -\infty < x \leq 0, & \\ \rho(0, t) &= g(t), & t \geq 0. & \end{aligned}$$

Interpretar los resultados en términos de flujo de tráfico.

## 1.2. Geometría de las características

Es conveniente, tal como se hace en ecuaciones diferenciales ordinarias, interpretar a (1.5) como un problema geométrico para la superficie  $z = \rho(x, t)$ . Para dar la formulación deseada vemos que resolver (1.5) es encontrar una superficie  $\mathcal{S}$  cuya ecuación es  $\rho = \rho(x, t)$ , que cumple con la ecuación diferencial y que pasa por la curva parametrizada por  $(\xi, 0, f(\xi))$ . Esto se ve en la Fig. 1.6

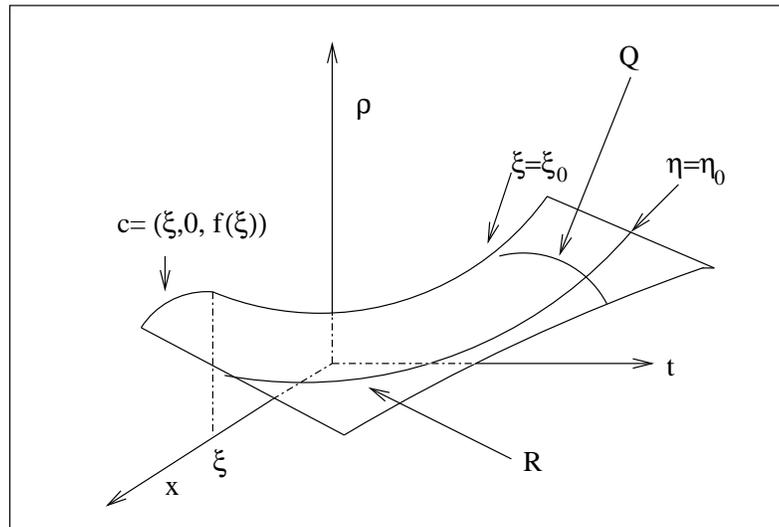


Fig. 1.6

La interpretación geométrica de la ecuación (1.6) es la de una restricción sobre la superficie  $\mathcal{S}$ . En forma más cuantitativa recordemos que el vector normal a  $\mathcal{S}$  está dado por  $(\rho_x, \rho_t, -1)$  y que usando esto, la Fig. 1.6 se interpreta como

$$(\rho_x, \rho_t, -1) \cdot (c, 1, 0) = 0. \quad (1.12)$$

La ecuación (1.12) nos dice que si  $\rho$  es una solución de (1.5), entonces el vector normal a  $\mathcal{S}$  es perpendicular a  $(c, 1, 0)$ . De ahí que el problema (1.5) es el de encontrar una superficie tangente al vector  $(c, 1, 0)$  y que pase por la curva  $\mathcal{C} = (\xi, 0, f(\xi))$ .

Para construir la superficie deseada recurrimos a la Fig. 1.6. Es conveniente parametrizar a  $\mathcal{S}$  en la forma

$$(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta), \rho(\xi, \eta)) \quad (1.13)$$

donde para cada valor fijo de  $\xi$  la parametrización (1.13) nos da, como función de  $\eta$ , una de las curvas  $Q$ . Cuando fijamos  $\eta = \eta_0$  nos movemos con la (1.13) como función de  $\xi$  a lo largo de una curva  $R$ . En particular es deseable que cuando  $\eta = 0$  nos movamos sobre  $\mathcal{C}$ , es decir queremos que

$$(x(\xi, 0), t(\xi, 0), \rho(\xi, 0)) = (\xi, 0, f(\xi)). \quad (1.14)$$

Como queremos que  $\mathcal{S}$  sea tangente a  $(c, 1, 0)$  nos basta pedir que las curvas  $Q$  que la generan lo sean. Esto se expresa como

$$\frac{d}{dt}x(\xi, \eta) = c, \quad \frac{d}{dt}t(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{d}{dt}\rho(\xi, \eta) = 0, \quad (1.15)$$

para toda  $\xi$ . Las ecuaciones (1.14), (1.15) son la expresión de (1.5) en paramétricas y su solución nos dará una expresión para  $\mathcal{S}$  en forma paramétrica.

Las ecuaciones (1.14) y (1.15) nos dicen que el resolver la ecuación parcial (1.5) es equivalente a resolver un sistema de ecuaciones ordinarias. Podemos ahora resolver la (6.15) con las condiciones iniciales de la (1.14) y obtener

$$x(\xi, \eta) = c\eta + \xi, \quad t(\xi, \eta) = \eta, \quad \rho(\xi, \eta) = f(\xi). \quad (1.16)$$

La ecuaciones (1.16) son la solución de (1.15) y nos da la expresión paramétrica de  $\mathcal{S}$ , además nos dice que  $\rho$  es constante cuando  $x = c\eta + \xi$ ,  $t = \eta$  es decir a lo largo de las rectas  $x = ct + \xi$ . Este es el mismo resultado que obtuvimos de (1.6). Para obtener de (1.16)  $\rho(x, t)$ , basta despejar  $\xi, \eta$  en términos de  $t, x$ . Esto nos da

$$\rho(x, t) = f(x - ct), \quad (1.17)$$

que es la solución que ya obtuvimos en (1.7).

En este caso pudimos pasar sin dificultad de la forma paramétrica (1.16) a (1.17), debido a que la función  $(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$  resultó invertible. Geométricamente en el plano  $(x, t)$  es lo mismo usar coordenadas  $x, t$  que  $\xi, \eta$ ; esto se debe a que, como vimos en la Fig. 1.3, por cada punto  $(x, t)$  pasa una sola recta  $x = ct + \xi$ . En ejemplos más complicados la transformación no siempre es invertible y estos ejemplos requieren un estudio especial.

Queda como ejercicio resolver los problemas 1.1.1 y 1.1.2 usando este método y comparar las soluciones obtenidas en ambos casos.

Antes de terminar esta sección veremos cómo el método geométrico introducido puede usarse para resolver otro tipo de problemas asociados con la ecuación

$$\rho_t + c\rho_x = 0. \quad (1.18)$$

Podemos pensar en resolver la (1.18) sujeta a la especificación de los valores de  $\rho$ , a lo largo de alguna curva  $\mathcal{C}$ , en el plano  $(x, t)$  y que no sea la recta  $t = 0$ , tal como se muestra en la figura siguiente.

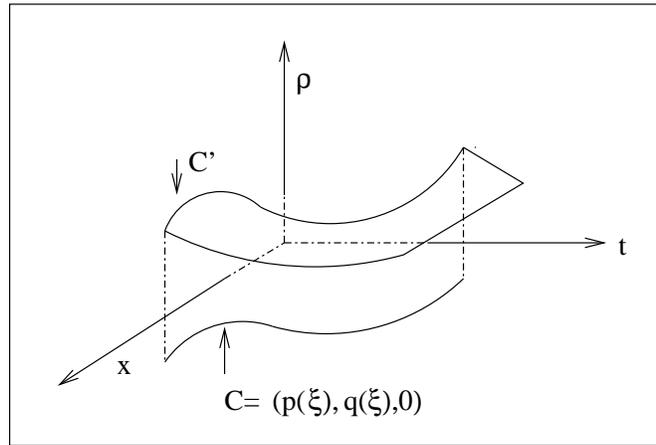


Fig. 1.7

En la Fig. 1.7 los valores de  $\rho$  a lo largo de  $\mathcal{C}$  son datos del problema y por esto la condición que  $\rho$  tome en  $\mathcal{C}$  los valores especificados se traducen en el que  $\mathcal{S}$  pase por la curva  $\mathcal{C}'$ . Un ejemplo de esta situación ya lo discutimos en la (1.8) donde la curva  $\mathcal{C}$  estaba formada por las rectas  $x \geq 0, t \geq 0$ .

Para resolver la (1.18) las curvas  $Q$  de la Fig. 1.7 deberán ser paralelas al vector  $(c, 1, 0)$ . Si parametrizamos a  $\mathcal{S}$  como en (1.13) tenemos que

$$\frac{d}{dt}x(\xi, \eta) = c, \quad \frac{d}{dt}t(\xi, \eta) = 1, \quad \frac{d}{dt}\rho(\xi, \eta) = 0. \quad (1.19)$$

Por otra parte cuando  $\eta = 0$  la curva  $(x(\xi, 0), t(\xi, 0), \rho(\xi, 0))$  tiene que ser la curva  $\mathcal{C}'$ . De aquí vemos que las condiciones iniciales para (1.19) son

$$x(\xi, 0) = p(\xi); \quad t(\xi, 0) = q(\xi), \quad \rho(\xi, 0) = \rho(p(\xi), q(\xi)) = \text{dato}. \quad (1.20)$$

Las funciones  $p(\xi)$  y  $q(\xi)$  también son conocidas y parametrizan a  $\mathcal{C}$ . La representación paramétrica de  $\mathcal{S}$  se obtiene resolviendo (1.19) con las condiciones iniciales dadas en

(1.20). De aquí obtenemos:

$$x = c\eta + p(\xi), \quad t = \eta + q(\xi), \quad \rho = \rho(p(\xi), q(\xi)). \quad (1.21)$$

Las ecuaciones (1.21) nos dicen que  $\rho$  es constante a lo largo de las rectas  $(x, t) = \eta(c, 1) + (p(\xi), q(\xi))$  es decir  $\rho = \text{constante}$  a lo largo de las características. Además (1.21) nos dice que el valor  $\rho(x, t)$  es el valor de  $\rho$  en  $Q$ , donde  $Q$  es el punto de intersección de  $C$  con la características a través de  $(x, t)$ . Esto se muestra con detalle en la Fig. 1.8.

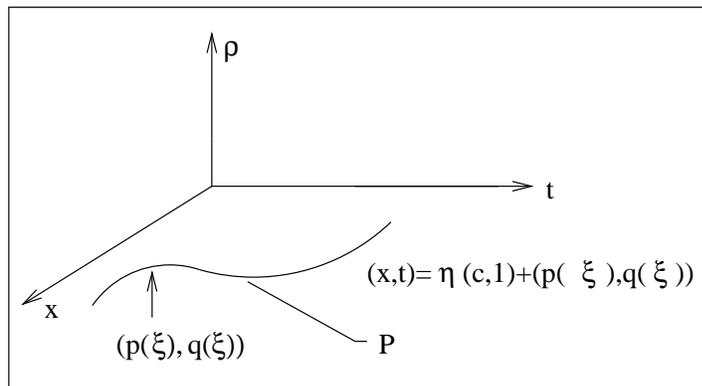


Fig. 1.8

Queda como un ejercicio el resolver el problema planteado en la ecuación (1.8) por este método. Queda también como ejercicio resolver el problema

**Problema 1.2.1** Resolver

$$\begin{aligned} \rho_t + c\rho_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, \\ \rho(x(t), t) &= g(t), \quad t \geq 0 \text{ cuando } x(t) = \alpha t, \quad \alpha > 0. \end{aligned}$$

Debe darse una solución explícita e interpretar el problema en el dibujo  $(x, t)$  correspondiente.

### 1.3. Solución de ecuaciones parciales de primer orden por el método de las características

Volvamos a analizar la solución de la ecuación del tráfico por el método de las características. La ecuación

$$\rho_t + c\rho_x = 0 \quad \text{con} \quad \rho(x, 0) = f(x) \quad (1.22)$$

tiene como solución una curva característica que es la recta  $x = ct + \zeta$  en el plano  $(x, t)$ , aquí hemos considerado que la variable  $x$  es función de  $t$  y donde el valor de  $\rho$  no cambia al moverse sobre esta curva característica. Este procedimiento nos reduce a resolver un par de ecuaciones diferenciales ordinarias. Si  $x(t)$  es la curva característica, entonces

$$\frac{d}{dt}(\rho(x(t), t)) = 0 \quad (1.23)$$

Al derivar implícitamente la ecuación 1.23 obtenemos la siguiente expresión

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0 \quad (1.24)$$

Si comparamos la ecuación 1.24 con la ecuación 1.22 podemos entonces hacer las siguientes igualdades

$$\frac{dx}{dt} = c \quad \text{y} \quad \frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.25)$$

La solución de la primera ecuación es la curva característica  $x = ct + \zeta$  y la solución de la segunda nos dice que  $\rho(x(t), t)$  es constante.

Este método lo podemos extender ecuaciones más generales. Supongamos ahora la siguiente ecuación diferencial parcial lineal de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + Q(x, t) \frac{\partial \omega}{\partial x} &= P(x, t) & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ \omega(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (1.26)$$

La ecuación 1.26 la podemos interpretar como

$$\frac{d\omega(x(t), t)}{dt} = P(x(t), t) \quad (1.27)$$

si consideramos que la solución debe seguir una curva característica  $x(t)$ , sobre esta curva el valor de  $\omega$  evoluciona bajo la regla 1.27, es decir la función  $P$  determina el cambio de  $\omega$  a lo largo de la curva característica  $x(t)$ . ¿Pero como determinamos  $x(t)$ ? Para ello debemos derivar implícitamente 1.27

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (1.28)$$

### 1.3. SOLUCIÓN DE ECUACIONES PARCIALES DE PRIMER ORDEN POR EL MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Si ahora comparamos 1.28 con la parte izquierda de la ecuación 1.26 podemos ver que se cumplen esta relación

$$\frac{dx(t)}{dt} = Q(x, t) \quad (1.29)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria tiene como condición inicial  $x(0) = \zeta$ . Entonces el problema de resolver 1.26 lo hemos traducido a resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias 1.29 y 1.27.

Veamos un ejemplo, tomemos la ecuación

$$\omega_t + x \omega_x = 0 \quad (1.30)$$

siguiendo el procedimiento antes explicado, vemos que  $x = Q(x, t)$  y  $0 = P(x, t)$ . Por lo tanto para determinar la curva característica debemos resolver

$$\frac{dx}{dt} = x \quad (1.31)$$

la cual tiene como solución  $x(t) = A \exp(t)$ , donde el valor de  $A$  lo obtenemos despejándola de la solución anterior:  $A = x \exp(-t)$ . Esta curva característica determina el valor de  $A$  cuando definimos un valor para  $x$  y  $t$ , el conjunto de curvas características las podemos ver en la figura Fig. 1.5a. Como podemos observar, cuando  $t = 0$  entonces  $A = x(0)$  y como  $x(0) = f(x)$  entonces  $A = x(0) = f(x)$ .

El valor de  $\omega$  no debe de cambiar a lo largo de la curva característica porque la ecuación 1.30 la podemos leer como  $\frac{d}{dt}\omega(x(t), t) = 0$ , es decir  $\omega$  se conserva constante a lo largo de la curva. Para satisfacer que  $\omega$  no cambia su valor a lo largo de la curva y que debe de tomar el valor de  $f(x)$  cuando  $t = 0$ , la solución debe escribirse como

$$\omega(x, t) = f(x \exp(-t)) \quad (1.32)$$

Consideremos un ejemplo más general, donde la función no sea necesariamente constante sobre la curva característica. Tomemos el siguiente ejemplo

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + t \frac{\partial \omega}{\partial x} = 1 \quad , \quad \omega(x, 0) = f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0 \quad (1.33)$$

La ecuación diferencial 1.33 puede leerse como la siguiente ecuación diferencial ordinaria si consideramos que la variable  $x$  es función de  $t$  sobre la curva característica

$$\frac{d}{dt}\omega(x(t), t) = \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{dx(t)}{dt} = 1 \quad (1.34)$$

Cuando comparamos la ecuación 1.33 con la 1.34 podemos identificar la derivada ordinaria de  $\omega$  y la derivada ordinaria de  $x$  de la siguiente forma

$$\frac{d\omega}{dt} = 1 \quad , \quad \frac{dx(t)}{dt} = t \quad (1.35)$$

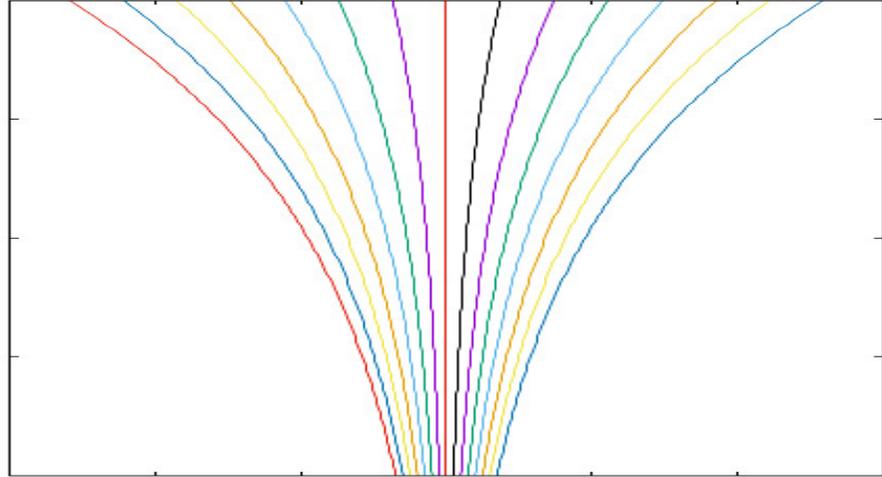


Fig. 1.5a

La solución de la ecuación diferencial de  $x$  es  $x(t) = \frac{t^2}{2} + C$ , así las curvas características son la familia de parábolas que podemos ver en la figura Fig. 1.5b. Por otro lado, la ecuación diferencial ordinaria de  $\omega$  en la ecuación 1.35 tiene como solución  $\omega(x(t), t) = t + \zeta$ , este es el valor de  $\omega$  al desplazarse sobre la curva característica. Además, de la condición inicial de nuestra ecuación parcial 1.33 se debe cumplir que  $\omega(x(0), 0) = f(x)$ . De estas dos últimas relaciones podemos concluir que  $\zeta = f(x(0))$ . Como  $x(0) = C$  de la expresión de la curva característica, entonces  $\zeta = f(C)$ . Así podemos substituir a  $\zeta$  por  $f$  en la expresión de  $\omega(x(t), t) = t + \zeta$ , donde la  $C$  lo podemos expresar como  $C = x - t^2/2$ . La solución de nuestra ecuación diferencial queda escrita así

$$\omega(x, t) = f\left(x - \frac{t^2}{2}\right) + t \quad (1.36)$$

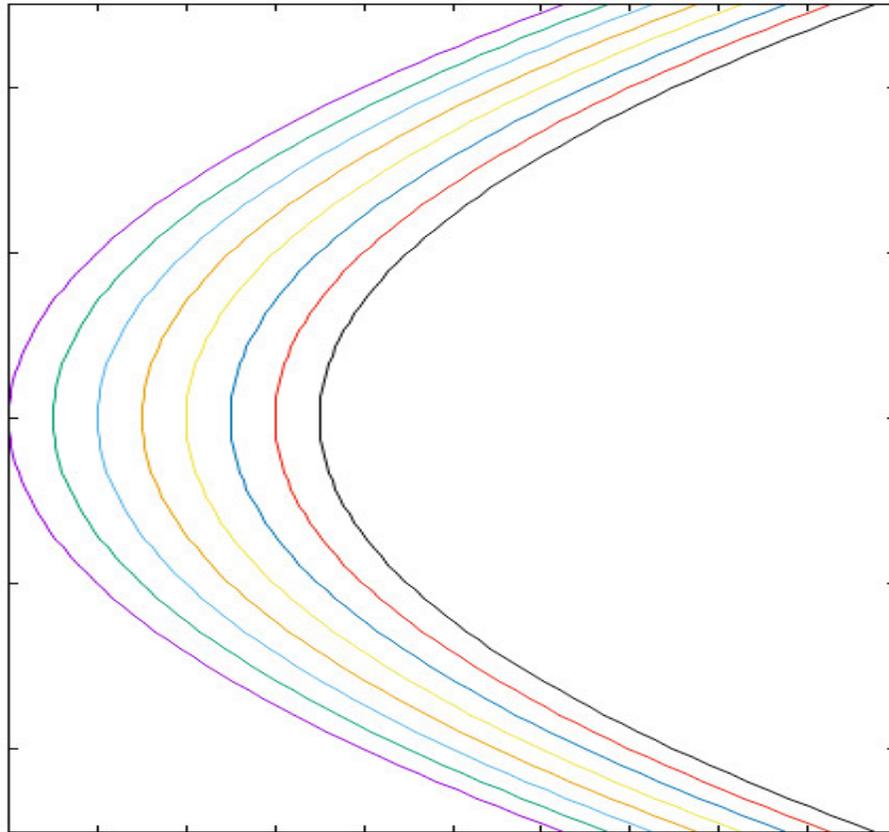


Fig. 1.5b

#### 1.4. Unicidad y discusión de las soluciones de la ecuación de primer orden

Observemos que para resolver el problema (1.5) solamente necesitamos una condición inicial; por ejemplo, cuando  $t = 0$  y esto nos lleva a una solución única. Una manera de justificar la suficiencia de una sola condición inicial para garantizar la unicidad es

como sigue.

En el plano  $(x, t)$  conocemos  $\rho(x, 0) = f(x)$ . Resolver (1.5) significa encontrar el valor de  $\rho$  para  $t > 0$ . Refiriéndonos a la Fig. 1.6 vemos que resolver (1.5) es encontrar  $\rho(x, h)$  para cualquier valor de  $h$ . Para calcular  $\rho(x, h)$ , si  $h$  es pequeña, podemos desarrollar  $\rho(x, h)$  en serie de Taylor en la variable  $t$  y tener

$$\rho(x, h) = \rho(x, 0) + \rho_t(x, 0)h + R_2(x, h) \quad (1.37)$$

donde  $R_2(x, h)$  es el residuo. La función  $\rho(x, 0) = f(x)$  es un dato del problema. La función  $\rho_t(x, 0)$  también se puede determinar en términos de  $\rho(x, 0)$ , ya que de la ecuación (1.5) se sigue

$$\rho_t(x, 0) = -c\rho_x(x, 0) = -c\frac{\partial}{\partial x}f(x) = -cf'(x). \quad (1.38)$$

De (1.37) y (1.38) se sigue que cuando  $h$  es pequeño

$$\rho(x, h) = f(x) - cf'(x)h + R_2(x, h). \quad (1.39)$$

Para mejorar la aproximación de (1.39) usamos el desarrollo de Taylor a segundo orden y vemos que

$$\rho(x, h) = \rho(x, 0) + \rho_t(x, 0)h + \frac{1}{2}\rho_{tt}(x, 0)h^2 + R_3(x, h).$$

Calculamos ahora  $\rho_{tt}$  en términos de  $f(x)$  derivando la ecuación (1.5) y obtenemos

$$\rho_{tt}(x, 0) = -c\rho_{tx} = -c\frac{\partial}{\partial x}\rho_t(x, 0) = -c\frac{\partial}{\partial x}(-cf'(x)) = c^2f''(x).$$

Procediendo de la misma forma podemos calcular de manera única las derivadas  $\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}$ . Se puede verificar que la aproximación de orden  $N$  a la solución  $\rho$  está dada por

$$\rho(x, h) = \sum_{k=0}^N \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(x)(ch)^k + R_{N+1}(x, h).$$

Este proceso puede continuarse indefinidamente y vemos que dada una condición inicial  $f$  nos lleva a una solución formal única y que todas las derivadas  $\frac{\partial^n \rho}{\partial t^n}$  quedan determinadas en términos de  $f(x)$ .

La solución formal

$$\rho(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} f^{(k)}(x)(ct)^k. \quad (1.40)$$

construida por el proceso que acabamos de describir, será una solución real del problema, si la convergencia de (1.40) es lo suficientemente fuerte como para poder justificar

#### 1.4. UNICIDAD Y DISCUSIÓN DE LAS SOLUCIONES DE LA ECUACIÓN DE PRIMER ORDEN 17

los pasos formales que nos llevaron a ella. Esta convergencia desde luego depende de las propiedades del dato inicial  $f(x)$ . En el caso de que  $f(x)$  sea tal que su serie de Taylor converja tenemos entonces que

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) x^l \quad (1.41)$$

Si sustituimos a 1.41 en 1.40 obtenemos

$$\rho(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (c)^k \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left( \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) x^l \right) t^k \quad (1.42)$$

esta expresión la podemos describir como

$$\rho(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} (-1)^k \frac{c^k}{k!} \frac{1}{(l-k)!} f^{(l)}(0) x^{l-k} t^k \quad (1.43)$$

notemos que la suma en  $k$  solo avanza hasta  $l$  porque la derivada parcial de  $x$  en la ecuación 1.42 se anula para  $k > l$ .

Si intercambiamos el orden de las sumas, entonces tendremos

$$\rho(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^l f^{(l)}(0) \frac{(-1)^k}{k! (l-k)!} x^{l-k} (ct)^k \quad (1.44)$$

Si multiplicamos por un  $1 = \frac{l!}{l!}$  no alteramos la expresión anterior y reordenando los terminos en las sumas obtenemos

$$\rho(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) \left( \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k l!}{k! (l-k)!} x^{l-k} (ct)^k \right) \quad (1.45)$$

donde reconocemos al final de la expresión y entre paréntesis la fórmula del binomio, por lo cual obtenemos finalmente

$$\rho(x, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} f^{(l)}(0) (x - ct)^l \quad (1.46)$$

Si comparamos esta última expresión con la expansión en series de Taylor de  $f$  en 1.41 podemos concluir que

$$\rho(x, t) = f(x - ct)$$

que es precisamente la solución de la (1.5). Esta discusión nos muestra cómo es suficiente un solo dato inicial para fijar de manera única los valores de la solución de (1.5). Análogamente al caso de ecuaciones ordinarias, el método de series discutido

permite construir soluciones formales para ecuaciones parciales.

En esta sección vimos que cuando una ecuación tiene características, sus soluciones se interpretan como ondas que se propagan. Las características también proveen un método geométrico y analítico para construir y discutir las propiedades de las soluciones.

### 1.5. Ecuación lineal de segundo orden con características

Al igual que en la sección anterior fijaremos nuestra atención en un ejemplo de propagación de ondas que esperamos esté asociado con características.

Todos hemos observado cómo al deformar poco, y en forma localizada, una cuerda tensa, las deformaciones que se propagan a lo largo de la cuerda conservan inalterada su forma inicial. Veremos que este comportamiento está asociado y se puede describir cuantitativamente con las características de la ecuación que gobierna el movimiento de una cuerda tensa.

Empezamos encontrando la ecuación deseada. Para esto tomamos una porción de la cuerda entre  $x$  y  $x + h$  tal como se ve en la Fig. 1.9, donde  $T$  es la fuerza de tensión y  $u(x, t)$  representa al desplazamiento de la cuerda de su posición de equilibrio (al eje  $x$ ).

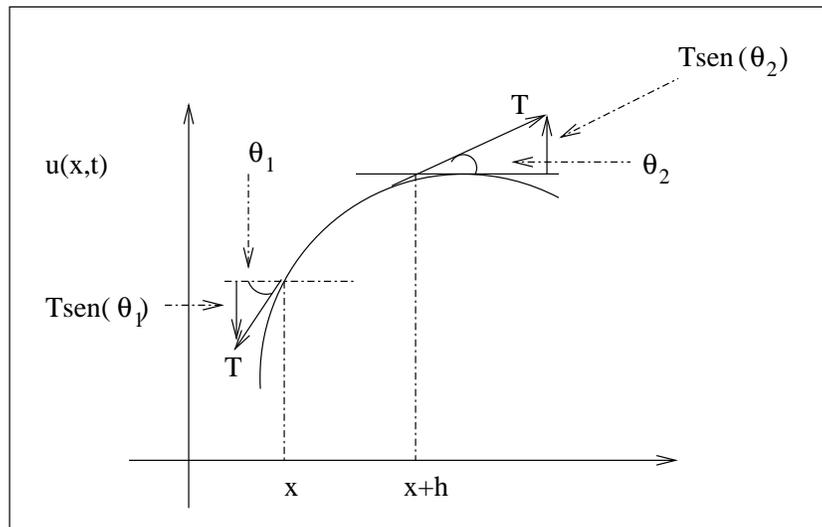


Fig. 1.9

### 1.5. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 19

La ecuación deseada se obtiene al aplicar la ley de Newton a la porción de cuerda entre  $x$  y  $x + h$ . Usando la ley de Newton, con  $\rho$  = densidad de la cuerda, tenemos

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1. \quad (1.47)$$

Como los desplazamientos son pequeños tenemos que  $\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1$ . Usando el hecho que la tangente coincide con la derivada de la curva que describe la forma de la cuerda, entonces (1.47) se transforma en

$$\rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+h} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right] \quad (1.48)$$

que para  $h$  pequeños se transforma en

$$\rho h u_{tt} = T h u_{xx} \quad (1.49)$$

y finalmente

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (1.50)$$

donde  $c^2 = \frac{T}{\rho}$ .

La ecuación (1.50) es la que supondremos controla el movimiento de disturbios pequeños en la cuerda. Para completar la especificación del problema necesitamos saber la posición y velocidad de la cuerda cuando  $t = 0$ . Con esto el problema de determinar el movimiento de la cuerda es el de resolver

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x) & \text{desplazamiento inicial,} \\ u_t(x, 0) &= g(x) & \text{velocidad inicial.} \end{aligned} \quad (1.51)$$

La primera diferencia que notamos entre (1.51) y (1.5) es que la ecuación envuelve ahora dos derivadas en el tiempo y que damos dos condiciones iniciales. Esperamos que tenga soluciones en forma de ondas que se propagan, ya que (1.51) es un modelo de esa situación.

Antes de resolver (1.51) veremos cómo se puede construir una solución formal única del problema, si es que conocemos dos condiciones iniciales. Para encontrar la solución procedemos como en (1.37) y vemos que cuando  $h \ll 1$

$$u(x, h) = u(x, 0) + u_t(x, 0)h = f(x) + u_t(x, 0)h. \quad (1.52)$$

En (1.37) pudimos encontrar  $u_t(x, 0)$  ya que estaba relacionada a través de la ecuación con el dato inicial  $f'(x)$ . La ecuación (1.51) nos proporciona información sobre  $u_t(x, 0)$  ya que tiene segundas derivadas, por esto debemos proporcionar esa información a través de  $g(x)$ . Veremos que dados  $u$  y  $u_t$  cuando  $t = 0$  podemos determinar en forma única la solución formal de (1.51). Para ilustrar el procedimiento consideremos una aproximación a tercer orden.

$$u(x, 0) = f(x) + g(x)h + \frac{1}{2!} u_{tt}(x, 0)h^2 + \frac{1}{3!} u_{ttt}(x, 0)h^3. \quad (1.53)$$

En (1.53)  $u_{tt}$  se determina a partir de (1.51) en la forma

$$u_{tt}(x, 0) = c^2 u_{xx}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, 0) = c^2 f''(x),$$

y análogamente, usando otra vez que  $u_{tt} = c^2 u_{xx}$  y que podemos cambiar el orden de derivación si nuestra función  $u$  es suficientemente regular, entonces

$$u_{ttt}(x, 0) = c^2 u_{txx}(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_t(x, 0) = c^2 \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x^2} = c^2 g''(x)$$

obteniendo así

$$u(x, h) = f(x) + g(x)h + \frac{1}{2}c^2 f''(x)h^2 + \frac{1}{3!}c^2 g''(x)h^3. \quad (1.54)$$

Si nosotros continuamos con este procedimiento de derivación, podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \underbrace{u_{tt \dots tt}}_{2n} &= c^{2n} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x) \\ \underbrace{u_{tt \dots tt}}_{2n+1} &= c^{2n+1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} g(x) \end{aligned} \quad (1.55)$$

de tal forma que tenemos la solución formal de la ecuación (1.51)

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x) t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(2n+1)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} g(x) t^{2n+1} \quad (1.56)$$

En particular, cuando la condición inicial de la velocidad de la cuerda es  $g(x) = 0$ , la expresión de (1.56) se reduce a

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^{2n}}{(2n)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x) t^{2n} \quad (1.57)$$

Nosotros podemos notar que la expresión (1.57) es muy similar a (1.40) salvo que solo aparecen terminos pares el índice de la suma. Sabemos que toda expansión en series de Taylor que solo contiene términos pares en el índice de la suma corresponde a una función par. Por otro lado, hemos visto que la expresión (1.40) puede escribirse como  $u(x, t) = f(x - ct)$ . Por otro lado, es claro que la expresión  $u(x, t) = (f(x - ct) + f(x + ct))/2$  es una función par y que si sustituimos las funciones  $f$  en la expresión anterior obtenemos (1.57) exactamente. Por lo tanto, cuando tenemos la situación que  $g(x) = 0$ , la solución de la ecuación (1.51) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{f(x + ct) + f(x - ct)\} \quad (1.58)$$

## 1.5. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 21

Esta discusión y la análoga para la ecuación de primer orden no son más que una ilustración en dos casos particulares del teorema de existencia y unicidad de Cauchy Kovalevski [3].

El método de desarrollo en serie (análogamente a lo que sucede en ecuaciones ordinarias) da poca información sobre la naturaleza de las soluciones del problema. Por esto resolveremos (1.51) de otra forma.

Para resolver (1.51) notemos que la ecuación puede escribirse en la forma

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = 0 = \left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)u. \quad (1.59)$$

De la (1.59) se sigue que resolver (1.51) es resolver sucesivamente dos problemas de la forma (1.5). Recordemos que los problemas (1.5) tienen por soluciones funciones  $v(x+ct)$ ,  $w(x-ct)$ . Por (1.59) vemos también que (1.51) tiene soluciones de la forma

$$u(x, t) = v(x + ct) + w(x - ct) \quad (1.60)$$

es decir ondas que se propagan hacia la derecha y hacia la izquierda. Las funciones  $v$  y  $w$  son arbitrarias y deberán ser determinadas usando las condiciones iniciales.

Empezamos por estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (1.61)$$

que describe el movimiento de una cuerda desplazada inicialmente en una forma  $f(x)$ . Usando (1.60) debemos encontrar  $v$  y  $w$  de tal forma que

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= w(x) + v(x) = f(x), \\ u_t(x, 0) &= cv'(x) - cw'(x) = 0. \end{aligned} \quad (1.62)$$

De la segunda ecuación (1.62) tenemos que

$$v(x) = w(x) + d, \quad (1.63)$$

y sustituyendo (1.63) en la primera ecuación (1.62) tenemos que

$$w(x) = \frac{f(x)}{2} - \frac{d}{2}. \quad (1.64)$$

Análogamente

$$v(x) = \frac{f(x)}{2} + \frac{d}{2}. \quad (1.65)$$

De (1.64) y (1.65) vemos que la solución de (1.61) es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) \quad (1.66)$$

resultado que concuerda con el obtenido al sumar la serie.

Para interpretar (1.66) es conveniente graficarla para dar valores de  $f$  tal como lo hicimos en la Fig. 1.4. En este caso la gráfica de (1.66) es la Fig. 1.10.

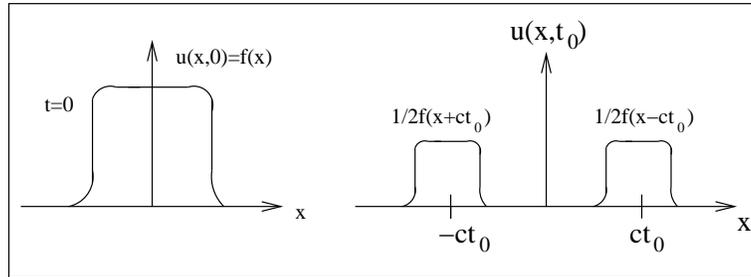


Fig. 1.10

En la Fig. 1.10 vemos que la deformación inicial se propaga hacia la derecha y hacia la izquierda con velocidad  $ct$ , sin cambiar de forma, pero reduciendo su altura a la mitad. En la figura Fig. 1.10a vemos una imagen más clara de la forma en que se propagan las dos ondas a partir del punto donde se ha deformado la cuerda. Este hecho nos es familiar en la práctica. Vemos además que el valor  $u(x, t)$  depende solamente del valor de la condición inicial  $f$  en los puntos de intersección de las rectas  $x = ct + \xi$ ,  $x = -ct + \eta$  con la recta  $t = 0$ , tal como se ve en la Fig. 1.11.

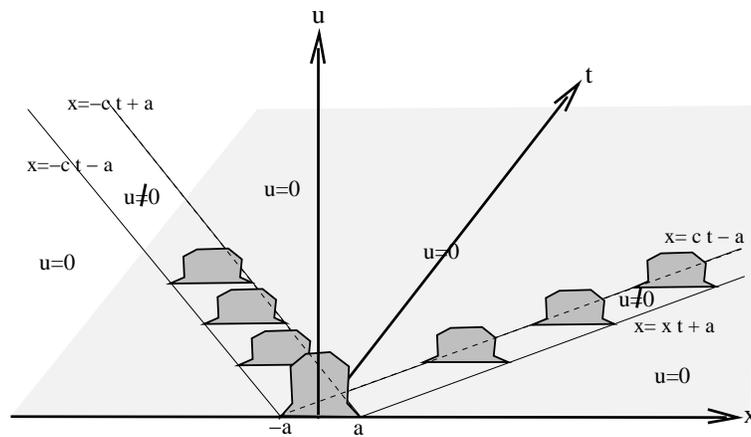


Fig. 1.10a

1.5. ECUACIÓN LINEAL DE SEGUNDO ORDEN CON CARACTERÍSTICAS 23

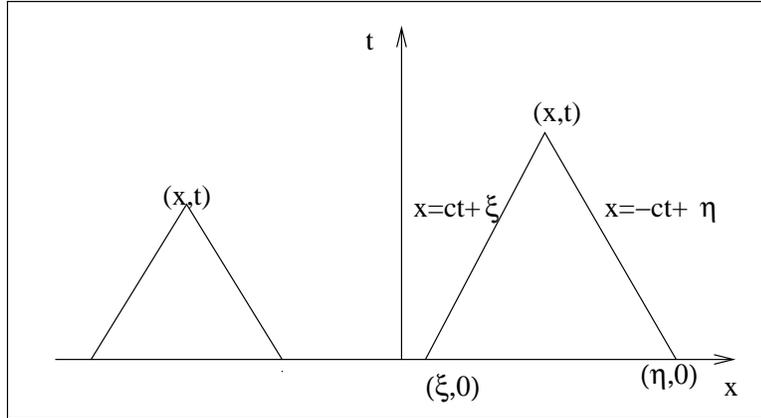


Fig. 11

La Fig. 1.11 nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar dos rectas de pendiente  $\pm \frac{1}{c}$  (llamadas también en este caso características) a través de  $(x, t)$ ; encontrar las intersecciones  $(\xi, 0)$ ,  $(\eta, 0)$  de esas rectas con el eje  $x$  y tomar el promedio de los valores  $f(\xi)$  y  $f(\eta)$  como  $u(x, t)$ . Nuevamente vemos que el diagrama  $(x, t)$  juega un papel importante para entender las soluciones de (1.61).

Usaremos ahora el plano  $(x, t)$  para describir en detalle la solución (1.66). Para esto usaremos la Fig. 1.12.

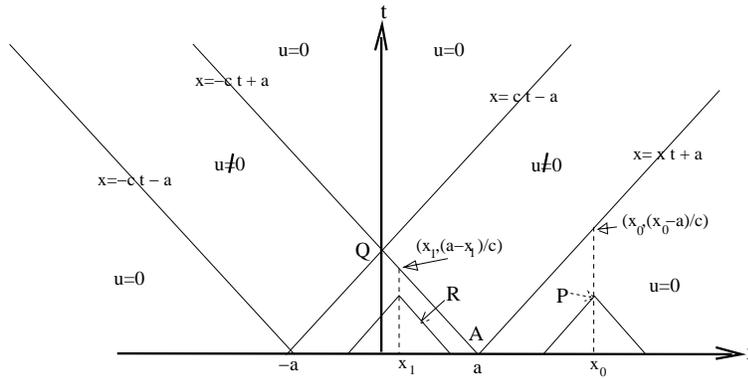


Fig. 12

De (1.66) y de la construcción de la Fig. 1.11 vemos que  $u = 0$  si  $p = (x, t)$  está a la derecha de la recta  $x = ct + a$ , ó si está a la izquierda de  $x = -ct - a$ , ya que las características intersectan la recta  $t = 0$  en puntos donde la condición inicial  $f = 0$ .

La interpretación de esta situación es así: los puntos a la derecha de  $x = ct + a$ , distan de  $(a, 0)$  una longitud mayor que  $ct$ . El hecho de que la solución sea cero para esos puntos nos indica que el disturbio que sale de  $a$  no llega a esos puntos en un tiempo  $t$ , lo cual dice que los disturbios se propagan precisamente con velocidad  $c$ . También vemos que el primer tiempo en el que  $u(x_0, t) \neq 0$  es precisamente  $t = \frac{x_0 - a}{c}$  que es el tiempo que tarda un disturbio que viaja con velocidad  $c$  para ir desde  $a$  hasta  $x_0$ . De la Fig. 1.10 y de (1.66) se sigue que  $u(x_0, t) = 0$  si  $t > \frac{x_0 + a}{c}$  que es el tiempo que tarda el disturbio generado en  $-a$  en llegar hasta  $x_0$ . Queda ahora como un ejercicio el repetir el análisis exterior para la región  $x < 0$ . En la banda acotada por  $x = ct \pm a$  y arriba de la recta  $QA$  la solución es  $u = \frac{1}{2}f(x - ct)$ .

En la región triangular  $-a, a, Q$  la situación es más complicada, ya que para cada punto  $R$  de ella pasan dos características  $C^+$  y  $C^-$  que intersectan  $t = 0$  en puntos donde  $f \neq 0$ . Queda como ejercicio el convencerse que  $u = 0$  en la región triangular acotada inferiormente por las rectas  $x = ct - a$ ,  $x = -ct + a$ .

Otro problema de propagación de ondas en una cuerda es cuando uno de los extremos está fijo en una pared. En este caso sabemos que los disturbios se reflejan y nos interesa estudiar cuantitativamente el proceso. El problema es resolver

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & 0 \leq x < \infty, & \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, & t \geq 0 & \quad \text{cuerda fija en } x=0, \\ u(x, 0) &= f(x), & f(x) \neq 0 & \quad \text{para } x_0 \leq x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Resolveremos ahora (1.67) usando el plano  $(x, t)$  que se ve en la Fig. 1.13.

En primer lugar, observemos que para puntos a la derecha de  $x_1$  y tiempos pequeños, el efecto de la pared debe ser inapreciable, ya que el disturbio generado en  $x_0 \leq x \leq x_1$  tarda un cierto tiempo en llegar a la pared y reflejarse. Por esto  $u = 0$  a la derecha de  $C_+^2$  (usando (1.66)). Además  $u = \frac{1}{2}f(x - ct)$  entre  $C_+^1$  y  $C_+^2$ . En la misma forma, los disturbios que viajan hacia la pared a lo largo de las características  $C_-$  no sienten la presencia de la pared hasta que el disturbio que sale de  $x_0$  llega a ella al tiempo  $t = x_0/c$ . En la región entre  $C_-^1$  y  $C_-^2$  y fuera de los triángulos  $x_0, x_1, v, W, R, S$ ,  $u = \frac{1}{2}f(x + ct)$ . Para calcular el valor de  $u$  en  $W, R, S$  que es la región de interacción entre la onda incidente y la reflejada, vemos que  $u = \frac{1}{2}f(x_0)$  a lo largo de  $C_-^1$  y como queremos que  $u = 0$  en  $x = 0$  tomamos  $u = -\frac{1}{2}f(x_0)$  a lo largo de  $C_+^3$ . En la misma forma vemos que podemos satisfacer la condición de frontera, si tomamos  $u = -\frac{1}{2}f(\xi)$  a lo largo de  $C_+$ . El valor de la solución fuera de las regiones descritas lo tomamos como cero y queda como ejercicio el convencerse, pensando en el proceso de reflexión, que ese es el caso.

Damos ahora la fórmula que esperamos sea solución de nuestro problema. Para  $(x, t)$  dentro de la región acotada por  $C_+^1, C_+^2, C_-^1, C_-^2$ , excepto por el triángulo  $W, R, S$ , tenemos

$$u = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct)$$

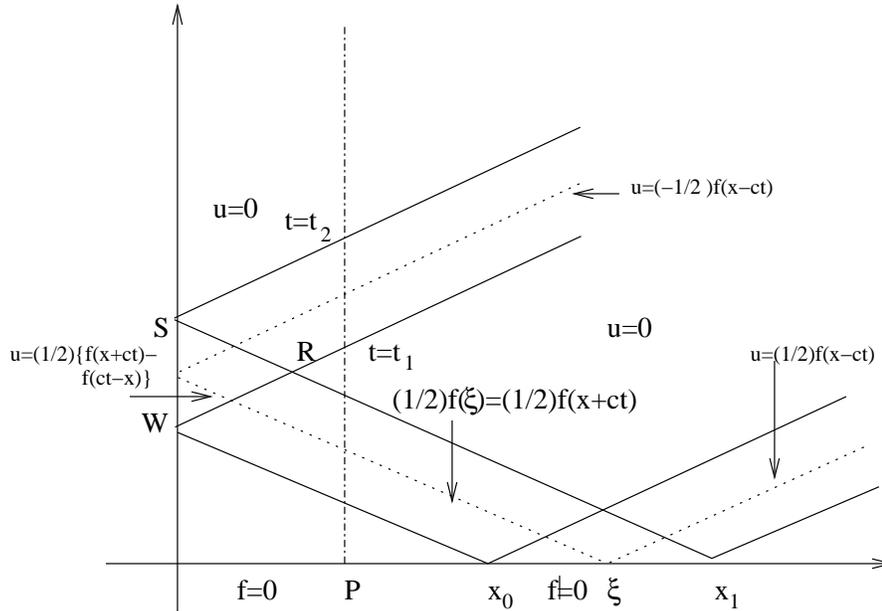


Fig. 1.13

que es la solución en ausencia de pared. Desde luego  $u = 0$  fuera de esa región y satisface las condiciones iniciales.

En el triángulo  $W, R, S$  la solución es la suma de la onda incidente  $\frac{1}{2}f(x + ct)$  (que es distinta de cero sólo entre  $C_-^1, C_-^2$ ) y de la onda reflejada  $-\frac{1}{2}f(ct - x)$ . En la región fuera de  $W, R, S$  y acotada por  $C_+^3$  y  $C_+^4$ , la solución es la onda reflejada  $-\frac{1}{2}f(ct - x)$ . Resumiendo

$$U = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2}f(ct - x) \quad (1.68)$$

donde los factores de la suma son sólo distintos de cero en las regiones marcadas en la Fig. 1.13.

Finalmente notamos que un observador en un punto  $P$ , como el que se ve en la Fig. 1.13, primero ve pasar la onda emitida en  $x_0 \leq x \leq x_1$ ; después al tiempo  $t = t_1$  la primera parte de la onda reflejada y cuando  $t = t_2$  vuelve al reposo. Queda como ejercicio el calcular  $t_1$  y  $t_2$  en términos de  $x_0$  y  $x_1$ .

Podemos comprobar directamente que (1.68) es solución de (1.67) con las condiciones iniciales y de frontera especificadas. Además, la discusión anterior nos da el significado de los tres términos y una manera gráfica de construir la solución si se conoce  $f(x)$ . Debemos notar que las características llevan siempre un valor constante de  $u$  hasta que son "reflejadas en la frontera"; y las características reflejadas llevan un valor

constante de  $u$  pero de signo contrario al valor que llevan las incidentes. Ahora resolvemos (1.67) sin recurrir a la Fig. 1.13. Sabemos que

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) \quad (1.69)$$

y procedemos como en (1.62) determinando  $v$  y  $w$ , usando las condiciones de frontera. Sustituyendo (1.69) en (1.67) obtenemos

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x) + w(x) = f(x), x \geq 0, \\ u(0, t) &= v(-ct) + w(ct) = 0, t \geq 0, \\ u_t(x, 0) &= -cv'(x) + cw'(x) = 0, x \geq 0. \end{aligned} \quad (1.70)$$

La primera y tercera ecuaciones (1.70) nos dan

$$v(\xi) = w(\xi) = \frac{1}{2}f(\xi), \quad \xi \geq 0. \quad (1.71)$$

La segunda ecuación determina a  $v$  para valores negativos ya que

$$\begin{aligned} v(-c\eta) &= -w(c\eta), \eta \geq 0, \\ v(c\eta) &= -w(-c\eta), \eta \leq 0, \\ v(\eta) &= -w(-\eta), \eta \leq 0. \end{aligned} \quad (1.72)$$

De (1.71), (1.72) y (1.69) tenemos que la solución es

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + v(x - ct) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \begin{cases} \frac{1}{2}f(x - ct), & \text{si } x - ct > 0, \\ -\frac{1}{2}f(ct - x), & \text{si } x - ct < 0. \end{cases}$$

Desde luego la solución coincide con la que obtuvimos geoméricamente.

De la discusión anterior concluimos que en el problema de reflexión, la solución es constante a lo largo de las características y cuando una característica encuentra una pared, ésta se refleja y la solución continúa igual pero con signo contrario. Veremos ahora cómo este proceso nos permite construir las soluciones para problemas más complicados, como cuando hay reflexión para dos paredes.

Ahora discutimos con detalle el problema de reflexión de ondas cuando la cuerda está fija en  $x = \pm l$ . El problema es resolver

#### Problema 1.5.1 Resolver

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, |x| \leq l, \\ u(x, 0) &= f(x), f'(x) = 0 \quad \text{para } a \leq |x|, \\ u_t(x, 0) &= 0 \\ u(-l, t) &= u(l, t) = 0, t \geq 0. \end{aligned}$$

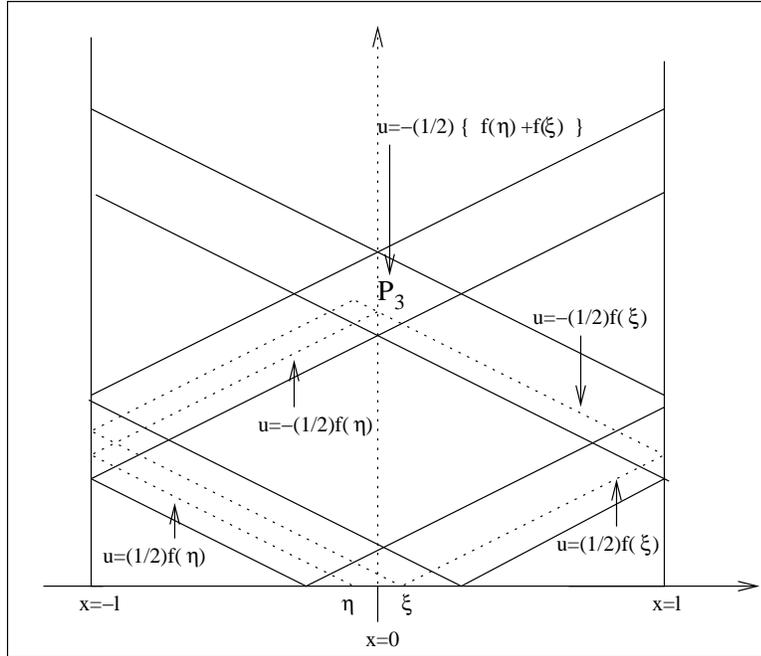


Fig. 1.14

En palabras debemos encontrar el movimiento de una cuerda fija desplazada inicialmente en la forma  $f(x)$ . Es de esperarse que el movimiento sea de vaivén de pulsos por la cuerda. La solución se examina en la Fig. 1.14.

La solución es distinta de cero sólo en las bandas limitadas por las características. En la región triangular sombreada verticalmente tenemos:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct).$$

Para puntos  $P_1$  la solución es el valor de  $u$  sobre  $C_+^1$  que es  $u = \frac{1}{2}f(x - ct)$ . En la región cuadrículada tenemos la interacción de la onda incidente y de la onda reflejada que describimos en la Fig. 1.13. Para puntos  $P_2$  la solución es el valor a lo largo de  $C_-^2$ , en el caso de la Fig. 1.14,  $u = -\frac{1}{2}f(\xi)$ . En la región donde está  $P_3$ , tenemos la interacción del pulso reflejado por la pared derecha y de aquél reflejado por la pared izquierda. En  $P_3$ ,  $u$  es la suma de los pulsos que viajan a lo largo de  $C_+^1$  y  $C_-^1$  y de  $C_-^2$  y  $C_+^2$ . El pulso que llega por  $C_-^1$  contribuye  $-\frac{1}{2}f(\xi)$  y el que llega por  $C_+^2$  contribuye con  $-\frac{1}{2}f(\eta)$ , donde  $u(P_3) = -\frac{1}{2}(f(\xi) + f(\eta))$ . Esta construcción determina el valor de  $u$  en todas las regiones.

Queda como ejercicio continuar el procedimiento y encontrar algunos valores cuando

$f(x) = -x^2 + a^2$ ,  $f = 2a$ . También queda verificar si la solución obtenida geoméricamente con ayuda de la Fig. 1.14 coincide con la solución analítica. (Ver Weinberger para más detalles y ejemplos).

Otro ejercicio interesante es el de hacer ver que las soluciones del problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= \hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0, \\ -f(-x) & x \leq 0, \end{cases} \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \tag{1.73}$$

son para  $x \geq 0$ , soluciones de (1.67). Esto nos da una manera alternativa de construir las soluciones para el problema de reflexión. Queda como ejercicio examinar la extensión del método cuando se tienen dos fronteras.

## 1.6. Método de imágenes de las características

En la sección anterior hemos calculado de manera analítica las características que describen el comportamiento de las dos ondas que se propagan en el espacio  $(x, t)$  cuando tenemos condiciones de frontera. Existe una forma más simplificada de calcular la propagación de estas ondas y como calcular el rebote de las ondas en las fronteras. Este método lo podemos llamar el método de imágenes imitando los métodos que se usan en electrostática. La idea principal es encontrar un problema libre de fronteras que coincida sus soluciones con el problema que nos planteamos al agregar las fronteras en nuestra ecuación diferencial parcial de segundo orden. Aunque el problema parece bastante complejo al inicio, mostraremos que se reduce a un simple problema de repetir las condiciones iniciales utilizando ciertas transformaciones como son las reflexiones y las traslaciones.

Comencemos con un problema con una sola condición de frontera tal como lo tenemos en la ecuación (1.67). La condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  para  $x > 0$  la vemos dibujada en la figura Fig. 1.14a. La propagación de las características que se desplazan hacia la derecha no llegan a intersectarse con ninguna frontera, de tal forma que se pueden propagar infinitamente en el tiempo en la dirección positiva del eje  $x$ . Sin embargo las características que se propagan en la dirección contraria encuentran su punto de intersección con la frontera cuando alcanzan el punto  $x = 0$ . ¿Cómo podemos ahora entender el rebote de esta onda que ha alcanzado la frontera? Un procedimiento simple es el siguiente, supongamos ahora un problema similar al expresado en la ecuación (1.67) pero donde eliminamos la condición de frontera, esto quiere decir que tenemos un problema definido en todo el espacio de la recta  $x$  sin embargo solo tenemos definida la condición inicial en la semirecta  $x > 0$ . ¿Cómo debemos completar la condición inicial para  $x \leq 0$ ? Aquí es donde aplicamos estas ideas de imágenes: tomemos la condición inicial  $u(x, 0) = f(x)$  con  $x > 0$  y apliquemos una primera reflexión usando

como eje de reflexión al eje  $x = 0$ , luego hagamos una segunda reflexión a la condición inicial que hemos agregado en  $x < 0$ , esta se realiza a través del eje  $t = 0$  (pero solo en la semirecta  $x < 0$ ). De esta forma hemos completado la condición inicial para todo el eje de las  $x$ . ¿Ahora, qué va a suceder en el punto  $x = 0$ , que es donde se encontraba la condición de frontera del problema original? Primero nos tenemos que convencer que estamos resolviendo la misma ecuación diferencial de la ecuación (1.67) pero eliminando la condición de frontera, si ahora resolvemos este nuevo problema tal como lo vemos en la figura Fig. 1.14a, solo tenemos que extender las rectas características sobre todo el espacio, así tendremos una onda que se propaga hacia la derecha y una onda que se propaga hacia la izquierda. Consideremos la condición inicial que está en la sección  $x < 0$ , las características que se propagan hacia la derecha van a alcanzar en cierto tiempo el eje  $x = 0$ , aquí es donde debemos observar del dibujo que el valor de  $u(0, t)$  que obtenemos en esta característica es en magnitud idéntico al que alcanza la característica que tiene su inicio en la sección  $x > 0$  y que se propaga hacia la izquierda coincidiendo en el mismo punto del eje  $x$  con la característica que habíamos calculado previamente que se propaga hacia la derecha. Si observa el dibujo, es fácil convencerse que los valores de  $u(0, t)$  son idénticos en magnitud pero con signo diferente, esto es claro debido a que la condición inicial para  $x < 0$  la hemos construido solo aplicando dos transformaciones de reflexión. El resultado es que el valor de  $u(0, t)$  es la suma de ambas características y automáticamente dan el resultado de  $u(0, t) = 0$  que coincide con la condición de frontera del problema original (1.67). Con esta construcción nos podemos convencer que el problema original y el plasmado en el dibujo de la figura Fig. 1.14a coinciden las soluciones exactamente en la región  $x < 0$ , son dicho de otra forma dos problemas equivalentes. De esta manera podemos ver que la onda al rebotar en la condición de frontera se continua a través de las características que se propagan hacia la derecha y que tienen su origen en  $x < 0$ .

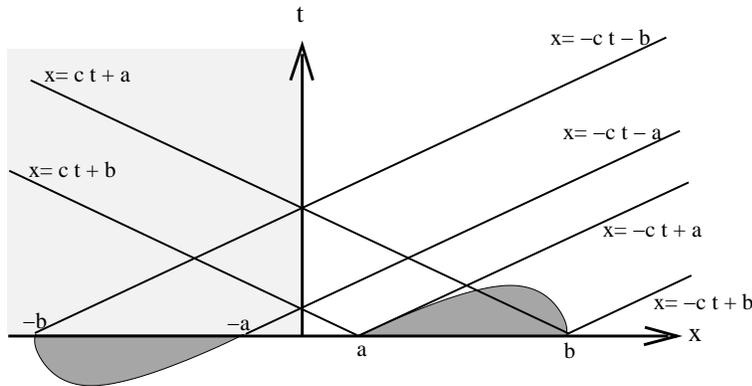


Fig. 1.14a

De esta forma hemos podido simplificar el problema con una frontera a un procedi-

miento gráfico donde solo hemos utilizado las reflexiones sobre los ejes, de tal forma que nuestro problema inicial con una condición de frontera es equivalente al siguiente problema escrito en la ecuación (1.74) pero solo en la región  $x \geq 0$ .

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < \infty & \\ u(x, 0) &= -f(-x) & \infty < x \leq 0 & \\ u_t(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty & \end{aligned} \tag{1.74}$$

Es claro que este procedimiento solo nos funciona cuando la condición de frontera es exactamente cero. Este método puede parecer al principio poco formal por la forma en que hemos expuesto la construcción del mismo, sin embargo, cuando veamos los métodos de la función de Green en la sección de ecuaciones elípticas podremos apreciar que es un método formal.

El siguiente problema es utilizar este procedimiento de imágenes para el caso cuando tenemos dos fronteras y que nos limitan el dominio a una región acotada. Supongamos el siguiente problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} & 0 < x < a & \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < a & \\ u(0, t) &= 0 & u(a, t) = 0 & \quad t > 0 \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < a & \end{aligned} \tag{1.75}$$

Ahora tenemos dos fronteras, esto quiere decir que cuando extendemos las características que calculemos al resolver la ecuación diferencial estas van a intersectar las fronteras, las características que se propagan hacia la izquierda alcanzarán el punto  $x = 0$  donde esta una de las fronteras y las características que se propagan hacia la derecha alcanzarán la otra frontera situada en  $x = a$ . ¿Es posible aplicar un método tipo imágenes en este problema? Vamos a ver que si es posible hacerlo pero encontraremos que es un poco más complejo debido a que las ondas van a estar colisionando con las fronteras continuamente para  $t > 0$ , es decir, vamos a tener un número infinito de rebotes de las ondas en las fronteras. Esto ya nos da una primera indicación que el problema de imágenes tiene que repetirse un número infinito de veces, ¿Pero cómo sucede esto? La figura Fig. 1.14b nos da la respuesta. Veamos en dicha figura que la condición inicial esta plasmada en la región acotada  $0 < x < a$ . Observemos que a la derecha de esta región, en  $a < x < 2a$  hemos agregado la condición inicial pero primer reflejandola en el eje  $x = a$  y luego en el eje  $t = 0$ , así hemos obtenido una extensión de la condición inicial similar a lo que hicimos en el problema anterior donde solo teníamos una única frontera. Ahora observemos la sección  $-a < x < 0$ , aquí hemos extendido la condición inicial reflejandola primero en el eje  $x = 0$  y luego en el eje  $t = 0$ , obteniendo algo similar al problema de una frontera. Es claro que cuando las características alcancen su primera intersección en las fronteras en  $x = 0$  y en  $x = a$ , las características que provienen de las condiciones iniciales extendidad en  $-a < x < 0$  y en  $a < x < 2a$  haran que la suma del valor de  $u$  de ambas características se anulen

en el punto de intersección  $x = 0$  y  $x = a$  emulando el mismo procedimiento descrito en el problema con una única frontera. Por lo tanto, tanto la onda que inicialmente se propagaba hacia la derecha después del rebote va a propagarse hacia la izquierda pero invertida, lo mismo sucede con la onda que se propaga inicialmente hacia la izquierda. Estas dos ondas que han rebotado prosiguen su camino pero van a alcanzar irremediamente las frontera otra vez. ¿Ahora como hacemos que se cumpla la condición de frontera en este segundo rebote? La idea sigue siendo la misma, añadiendo otro par de imagenes a la derecha e izquierda de la condición inicial ya previamente extendida. Si observamos en la figura Fig. 1.14b en la region  $2a < x < 3a$  vemos que podemos extender la condición inicial solamente reflejando la imagen de la condición inicial en  $a < x < 2a$  primero en el eje  $x = 2a$  y luego en el eje  $t = 0$ . Lo mismo haremos pero ahora en la región  $-2a < x < -a$ , lo que haremos es reflejar la condición inicial definida en  $-a < x < 0$  a través del eje  $x = -a$  y luego hacer la reflexión en el eje  $t = 0$ , así obtenemos una nueva región de condiciones iniciales que van desde  $x = -a$  hasta  $x = 3a$ . Si extenemos las características de las regiones comprendidas en  $-2a < x < -a$  y  $2a < x < 3a$  veremos que cuando alcanza la primera el punto  $x = 0$  y la segunda el punto  $x = a$  van a intersectarse con las características que vienen del primer rebote, lo que va a suceder que al sumarse el valor de  $u$  se va a anular, cumpliendo así la condición de frontera del problema inicial planteado en (1.75). De esta manera, el segundo rebote de ambas ondas corresponderá a la extensión de estas características en la región  $0 < x < a$ . Queda claro que si queremos encontrar los siguientes rebote de las ondas debemos repetir este método de manera infinita, extendiendo las condiciones hacia la derecha y la izquierda de manera repetitiva. Finalmente podemos observar que al hacer el procedimiento completo obtendríamos el siguiente problema

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= c^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty & & t > 0 \\
 u(x, 0) &= f(x - (2n)a) & (2n)a < x < (2n+1)a & & n \in \mathbb{Z} \\
 u(x, 0) &= -f((2n+2)a - x) & (2n+1)a < x < (2n+2)a & & n \in \mathbb{Z} \\
 u_t(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty & & 
 \end{aligned} \tag{1.76}$$

## 1.7. Condiciones de frontera en la velocidad

Para completar nuestra discusión sobre la ecuación de onda consideramos el problema

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & & t \geq 0, \\
 u(x, 0) &= & 0, & & \\
 u_t(x, 0) &= & g(x). & & 
 \end{aligned} \tag{1.77}$$

Buscamos una solución de la forma

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) \tag{1.78}$$

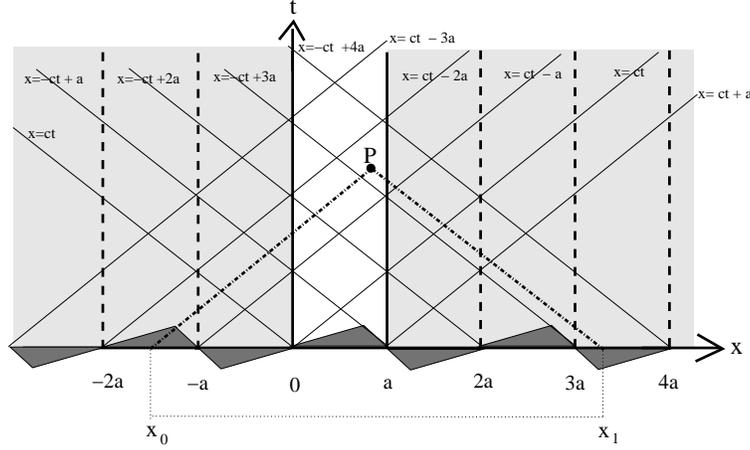


Fig. 1.14b

y tratamos de determinar  $v$  y  $w$  usando las condiciones iniciales en (1.77). Sustituyendo (1.78) en (1.77) tenemos:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x) + w(x) = 0, \\ u_t(x, 0) &= cw'(x) - cv'(x) = g(x). \end{aligned} \quad (1.79)$$

De (1.79) vemos que

$$\begin{aligned} v'(x) &= -\frac{1}{2c}g(x); & v(\xi) &= -\frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds + d; \\ w(\xi) &= -v(\xi) = \frac{1}{2c} \int_0^\xi g(s)ds - d, \end{aligned} \quad (1.80)$$

y de (1.80) obtenemos

$$u(x, t) = v(x - ct) + w(x + ct) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds \quad (1.81)$$

que nos da la solución de (1.77) como puede verificarse por sustitución directa. Una interpretación útil de (1.81) se obtiene de nuevo examinando la Fig. 1.15. La ecuación (1.81) nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar las características a través de  $(x, t)$ , ver dónde intersectan la recta  $t = 0$ , e integrar en el intervalo comprendido entre las dos intersecciones, la condición inicial  $g$ . El valor de la integral es  $u(x, t)$ . Vemos que  $u(x, t)$  depende solamente de los valores iniciales de  $u$  en la base del triángulo con vértice en  $P$  y no siente los valores de la condición inicial fuera de

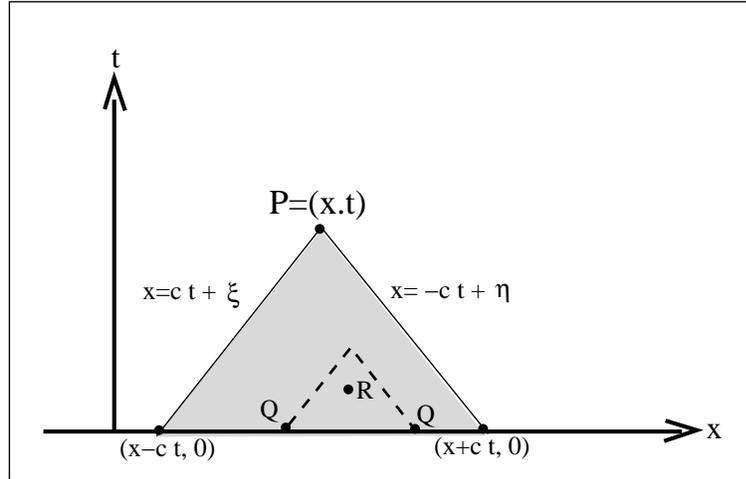


Fig. 1.15

esa región.

Nuevamente la propiedad de que los disturbios en  $u$  se propagan con velocidad finita se manifiesta. Esto se debe a que si  $g(x) = 0$  para  $|x| > a$  entonces  $u = 0$  a la derecha de  $x = ct + a$  y a la izquierda de  $-ct - a$  como puede verse de (1.81) y de la Fig. 1.15 Finalmente la solución de (1.51) está dada por la suma de (1.66) y (1.81) en la forma

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x + ct) + \frac{1}{2}f(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds. \quad (1.82)$$

La fórmula (1.82) se debe a D'Álambert. En el plano  $(x, t)$  la ecuación (1.82) nos dice que el valor  $u(x, t)$  depende solamente de los datos iniciales en la base del triángulo formado por el punto  $(x, t)$ , la recta  $t = 0$  y las características a través de  $(x, t)$  que intersectan a la recta  $t = 0$ . La región de la recta  $t = 0$  entre  $x - ct$  y  $x + ct$  se llama dominio de dependencia de  $(x, t)$ . Esto se debe a que  $u(x, t)$  no se altera si se cambian los datos iniciales fuera de la región  $x - ct \leq \xi \leq x + ct$ . De (1.82) vemos también que un cambio en la condición inicial en un punto  $Q$  sólo puede influir en la solución  $u$  en puntos  $R$  del cono que tiene por vértices a  $Q$  y cuyos lados son las características a través de  $Q$ .

En esta sección hemos encontrado una solución al problema para la ecuación de onda en diversas situaciones. La solución encontrada refleja nuestra experiencia en propagación de pulsos a lo largo de una cuerda y su reflexión por paredes. Sin embargo, para completar nuestra discusión debemos probar que las soluciones obtenidas son las únicas posibles.

En cuanto a la unicidad estamos razonablemente convencidos, con base en los casos

particulares del teorema de Cauchy-Kovalevski, discutidos en los casos en que  $f$  y  $g$  tengan desarrollos de Taylor. Sin embargo, nos interesa probar la unicidad para datos iniciales más generales, así como también para problemas mixtos de valores iniciales y de frontera. Este es el objeto de la siguiente sección.

Antes de finalizar esta sección debemos mencionar que la ecuación de D'Álambert, expresada en la ecuación (1.82), podemos aplicarle el método de imágenes descrito anteriormente cuando tenemos las condiciones de frontera, esto hace que dicha ecuación sea válida para la ecuación de onda con límites acotados o infinitos.

## 1.8. Unicidad de las soluciones para la ecuación de onda

Consideremos el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}, & -l \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & u_t(x, 0) = g(x), \quad -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) &= u(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned} \quad (1.83)$$

La solución de (1.83) fue construida en las secciones anteriores. Desde luego entendemos por una solución de (1.83) una función  $u$  con dos derivadas que satisfagan (1.83). Por esto, para que la construcción dada en la Fig. 1.14 valga, debemos suponer que tanto  $f$  como  $g$  tiene dos derivadas, lo que supondremos a partir de ahora. (Desde luego se puede ampliar el concepto de solución pero esto no nos interesa por el momento).

Para probar la unicidad de (1.83) utilizaremos el principio de la conservación de energía, que es un argumento general aplicable a muchas ecuaciones ordinarias y parciales como veremos a lo largo de estas notas.

Para motivar la prueba consideremos la ecuación de las oscilaciones

$$\begin{aligned} y''(t) + y(t) &= 0, \\ y(0) &= a, \quad y'(0) = b, \end{aligned} \quad (1.84)$$

que tiene por solución  $y(t) = a \cos t + b \sin t$ . Queremos probar la unicidad. Para probarla tomamos  $z = y_1 - y_2$  donde  $y_1$  y  $y_2$  son dos soluciones de (1.84), entonces  $z$  satisface

$$z'' + z = 0, \quad z(0) = z'(0) = 0, \quad (1.85)$$

y queremos probar que  $z = 0$ . Físicamente que  $z = 0$  es la única solución de (1.85), ya que  $z(0) = z'(0) = 0$ , nos dice que la energía total del movimiento es cero. Por conservación de energía ésta debe seguir siendo cero para todo el tiempo, de aquí que  $z = 0$  si  $t \geq 0$ .

Ahora damos una expresión analítica para el argumento anterior. La energía  $E(t)$  de una solución de (1.85) es

$$E(t) = \frac{1}{2}y'^2(t) + \frac{1}{2}y^2(t).$$

Veremos que  $E'(t) \equiv dE/dt = 0$  lo cual nos dice que la energía se conserva si  $z$  es solución de (1.85). En efecto

$$E'(t) = z'(z'' + z) = 0. \tag{1.86}$$

donde vemos que es cero debido a que entre los paréntesis tenemos la ecuación diferencial (1.85).

De (1.86) tenemos que

$$\frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{2}z^2 = E(t) = E(0) = \frac{1}{2}z'^2(0) + \frac{1}{2}z^2(0) = 0 \tag{1.87}$$

de donde se sigue que  $z = 0$  para  $t \geq 0$  que es el resultado deseado.

Extenderemos ahora el argumento anterior a la ecuación de onda. Para esto necesitamos encontrar la energía cinética y potencial de la cuerda.

Pensemos la cuerda dividida en tramos como se ve en la Fig. 1.16 y recordemos que  $u_t$  es la velocidad de la cuerda en la dirección vertical.

De la Fig. 1.14 vemos que la energía cinética en el tramo  $x_i, x_{i+h}$  está dada por

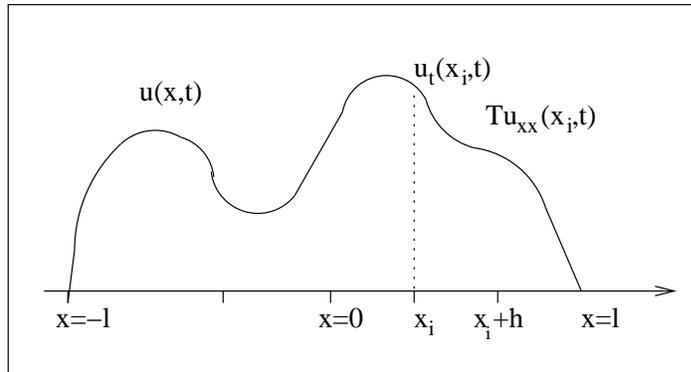


Fig. 1.16

$$\frac{1}{2}\rho h u_t^2(x, t)$$

siendo  $|h| \ll 1$  y la energía cinética total de la cuerda está dada por

$$\frac{1}{2} \int_{-l}^l \rho u_t^2(\xi, t) d\xi . \tag{1.88}$$

La energía potencial que adquiere la cuerda al subir de la posición  $u = 0$  al tiempo  $t = 0$ , a la posición  $u(x, t)$  al tiempo  $t$ , es el trabajo realizado para vencer a la fuerza de tensión. Para la cuerda entre  $x_i$  y  $x_{i+h}$  este trabajo es

$$-Th \int_0^t u_{xx}(x_i, s)u_s(x_i, s)ds \quad (1.89)$$

que es la integral de la potencia. De (1.89) obtenemos la energía potencial total integrando sobre toda la cuerda. Esto es:

$$- \int_{-l}^l \int_0^t T u_{xx}(x, s)u_s(x, s)dsdx . \quad (1.90)$$

donde debemos recordar que la integral de trabajo esta dada por la integral de fuerza por distancia o bién la integral de fuerza por velocidad e integrando en el tiempo, esta es la integral que tenemos en (1.90) donde el término  $Tu_{xx}(x, t)$  es la fuerza y  $u_t(x, t)$  es la velocidad.

Para nuestros propósitos es conveniente reescribir (1.90) eliminando a  $u_s$ . Esto lo hacemos así, integramos por partes en la variable  $x$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^t \int_{-l}^l T u_{xx}(x, s)u_s(x, s)dxds &= T \int_0^t \left\{ -u_x u_t \Big|_{-l}^l + \int_{-l}^l u_x u_{xs} dx \right\} ds \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \int_{-l}^l \frac{T}{2} u_x^2(x, s) dx ds = \frac{T}{2} \int_{-l}^l u_x^2(x, t) dx \end{aligned} \quad (1.91)$$

ya que  $u(-l, t) = u(l, t) = u(x, 0) = 0$ . De (1.91) y (1.88) esperamos que la cantidad que se conserve para soluciones de (1.83) sea

$$E(t) = \rho \int_{-l}^l \frac{1}{2} u_t^2(x, t) dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l u_x^2(x, t) dx . \quad (1.92)$$

Para probar la unicidad procedemos como en (1.85) llamando  $z$  la diferencia de dos soluciones de (1.83) y probaremos que  $z = 0$ . Para esto veremos que

$$E(t) = \frac{\rho}{2} \int_{-l}^l z_t^2 dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l z_x^2 dx \quad (1.93)$$

satisface  $E(t) = E(0)$ . Esto se obtiene calculando

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{-l}^l \rho z_t z_{tt} dx + T \int_{-l}^l z_x z_{xt} dx = \rho \int_{-l}^l z_t z_{tt} dx - T \int_{-l}^l z_t z_{xx} + T z_x z_t \Big|_{-l}^l \\ &= \rho \int_{-l}^l z_t (z_{tt} - c^2 z_{xx}) dx = 0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

ya que  $z_t(-l, t) = z_t(l, t) = 0$ . De (1.94) se sigue que  $E(t) = E(0)$  y como  $E(0) = 0$ , tenemos que

$$\frac{\rho}{2} \int_{-l}^l z_t^2 dx + \frac{T}{2} \int_{-l}^l z_x^2 dx = 0, \quad t \geq 0. \quad (1.95)$$

De (1.95) concluimos que  $z_t = z_x = 0$  para todas las líneas paralelas a  $-l \leq x \leq l$ . Esto nos garantiza que  $z = \text{constante}$  y como  $z = 0$  en la línea inicial tenemos que  $z = 0$  para  $-l \leq x \leq l, t \geq 0$ . Que es el resultado deseado.

Nótese que esta prueba de unicidad usa fuertemente el hecho de que el movimiento se lleva a cabo en una región acotada. Daremos ahora una prueba de unicidad para una región no acotada.

Para probar este resultado recordemos que la fórmula de D'Álambert (1.82) nos muestra que la solución  $u$  en la región dada por el triángulo  $VAB$  de la Fig. 1.17 sólo depende de los datos iniciales en la recta  $AB$ .

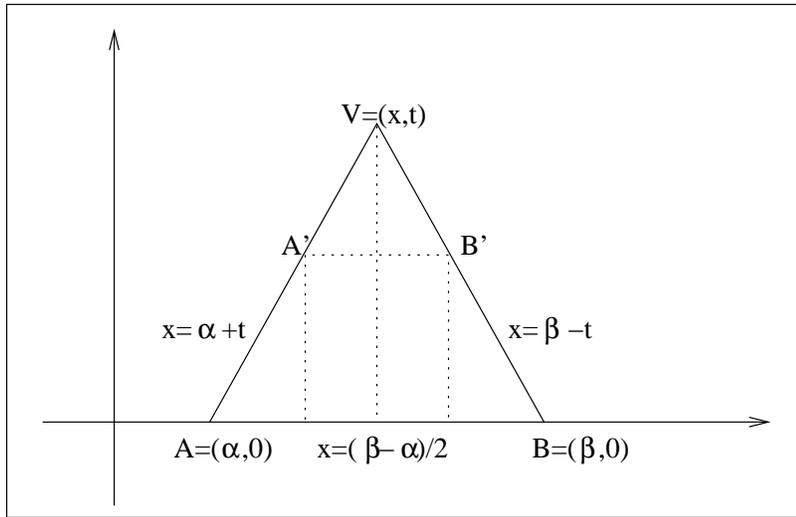


Fig. 1.17

Por este motivo esperamos que cualquier solución de (1.83) quede unívocamente determinada en  $VAB$  por los datos iniciales en  $AB$ . En particular, si los datos iniciales son cero en  $AB$ , deberá ser cero en toda  $VAB$ .

Ahora probaremos este resultado. Más precisamente: supongamos  $z(x, t)$  una solución de

$$z_{tt} = z_{xx}, \quad z_t = z = 0 \text{ en } AB,$$

entonces  $z = 0$  en  $VAB$ . Para probar el resultado consideremos de nuevo la energía

de la solución en la recta  $A'B'$  como función del tiempo. Esto es

$$E(t) = \int_{x+t}^{\beta-t} \frac{1}{2}z_t^2 + \frac{1}{2}z_x^2 dx, \quad 0 \leq t \leq \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Es de esperarse que  $E(t)$  no crezca ya que la región  $\alpha + t \leq x \leq \beta - t$  donde hay movimiento se vuelve cada vez más pequeña cuando  $t \rightarrow \frac{\beta - \alpha}{2}$ . Para probar esto calculamos  $E'(t)$ , donde debemos tener la precaución de considerar la derivada respecto al tiempo que aparecen en los límites de integración y después haciendo integración por partes obtenemos:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \int_{x+t}^{\beta-t} (z_t z_{tt} + z_x z_{xt}) dx + \frac{1}{2} \left\{ -(z_t^2 + z_x^2)(\beta - t, t) - (z_t^2 + z_x^2)(\alpha + t, t) \right\} \\ &= \int_{x+t}^{\beta-t} z_t (z_{tt} - z_{xx}) dx - z_t z_x \Big|_{\alpha+t}^{\beta-t} - \frac{1}{2} (z_t^2 + z_x^2)(\beta - t, t) - \frac{1}{2} (z_t^2 + z_x^2)(\alpha + t, t) \\ &= -\frac{1}{2} (z_t + z_x)^2(\beta - t, t) - \frac{1}{2} (z_t - z_x)^2(\alpha + t, t) \leq 0 \end{aligned} \quad (1.96)$$

De (1.96) concluimos que  $E'(t) \geq 0$  en  $VAB$  de donde se sigue que  $0 \leq E(t) \leq E(0) = 0$ . De aquí que  $E(t) = 0$  en todas las líneas horizontales  $A'B'$  en  $VAB$ . Esto nos muestra que  $z_t = z_x = 0$  en  $VAB$  y como  $z = 0$  en  $AB$  tenemos que  $z = 0$  en todo  $VAB$ . Esto prueba nuestra afirmación.

Este resultado nos da la unicidad para el problema de la cuerda infinita aplicándolo a todos los puntos  $V$ . Queda como un ejercicio, el probar con este método la unicidad de la solución del problema cuando sólo hay una pared que refleja. Se debe hacer esto con una combinación de (1.96) y (1.94).

Para mayores detalles consultar Courant-Hilbert [3] K. O. Friedrichs [7] y Jorge Ize [8].

## Capítulo 2

# Sistemas de ecuaciones con características

En esta sección se discutirán sistemas de ecuaciones lineales que tiene características. Se analizarán problemas con valores iniciales y de frontera a partir de varios ejemplos. Se concluirá la sección con algunos problemas simples para las ecuaciones de Maxwell que se explican y se discuten con cierto detalle. Nuestra presentación sigue muy de cerca las notas de Friedrichs de propagación de ondas electromagnéticas.

### 2.1. El problema de las líneas de transmisión

Es un hecho conocido por todos que las señales eléctricas viajan a lo largo de los alambres con cierta velocidad. Ahora veremos cómo se puede describir cuantitativamente el fenómeno usando Ecuaciones en Derivadas Parciales. Para esto supondremos un cable recto representado por el eje  $x$  como el que se indica en la Fig. 2.1, con capacitancia constante  $c$  y una inductancia  $L$  por unidad de longitud.

Si se aplica un voltaje  $v(t)$ , una corriente  $i(t)$  fluirá hacia el lado derecho y nos interesa calcular esa corriente  $i(x, t)$  en todos los puntos del cable como función del voltaje aplicado  $g(t)$  en  $x = 0$ . Se deben encontrar las ecuaciones que relacionan a  $i$  y a  $v$  en el cable.

Las ecuaciones que necesitamos en este caso son la ley de conservación de la carga y la ley de Faraday.

La ley de conservación de la carga nos dice que si  $\rho(x, t)$  es la densidad de carga, tenemos entonces que

$$\frac{d}{dt} \int_x^{x+h} \rho(\xi, z) d\xi = i(x, t) - i(x + h, t). \quad (2.1)$$

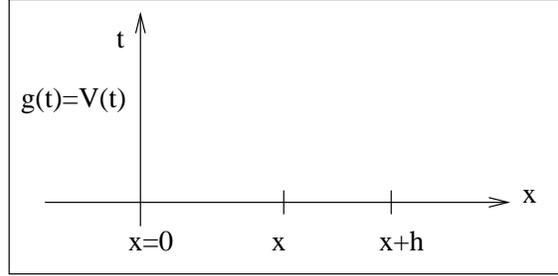


Fig. 2.1

Notemos que (2.1) es la misma que (1.1), en este caso el flujo de coches corresponde al flujo de electrones que circula por el cable y la densidad de coches corresponde a la densidad de carga. Al derivar la parte derecha de la ecuación (2.1) nos queda dentro del integrando el cambio de la densidad de carga en el tiempo que por definición es el voltaje  $v(x, t)$  (multiplicado por una constante  $c$ ). Como  $|h| \ll 1$  entonces la integral la escribimos como  $cv(x, t)h$  donde la  $h$  la podemos pasar dividiendo, si  $h \rightarrow 0$  entonces el lado derecho de la ecuación (2.1) se convierte en  $i_x(x, t)$ . Así vemos que (2.1) se ha transformado en

$$cv_t + i_x = 0, \quad x \geq 0, \quad t \geq 0. \quad (2.2)$$

La ecuación (2.2) es una sola ecuación para dos incógnitas. En (1.2) teníamos una relación algebraica  $Q(\rho)$  entre las dos incógnitas. En el caso del electromagnetismo no hay tal relación algebraica y la segunda ecuación para calcular  $i$  y  $v$  nos la dará la ley de Faraday. Para usar dicha ley examinemos la caída de voltaje  $v(x+h, t) - v(x, t)$  entre  $x+h$  y  $x$ . Sabemos por la ley de Faraday (que es experimental) que esa caída de voltaje es proporcional a la rapidez de cambio de  $i(x, t)$ , es decir, es proporcional a  $i_t(x, t)$ . En cantidades esto es

$$v(x+h, t) - v(x, t) = -Lhi_t(x, t) \quad (2.3)$$

donde  $L$  es la inductancia por unidad de longitud. Al pasar dividiendo  $h$  en (2.3) y tomando el límite cuando  $h \rightarrow 0$ , tenemos que

$$v_x + Li_t = 0 \quad (2.4)$$

Por lo tanto, las ecuaciones que queremos estudiar son

$$\begin{aligned} cv_t + i_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ Li_t + v_x &= 0, & x \geq 0, \quad t \geq 0, \\ v(x, 0) &= i(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ v(0, t) &= g(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Nótese que el valor  $i(0, t)$  no se especifica, ya que debe ser consistente con el valor de  $v(0, t)$  y su determinación es parte del problema. Las ecuaciones (2.5) corresponden a un cable que en  $t = 0$  está sin carga y sin corriente. Además, en  $x = 0$  se le aplica una señal de voltaje  $g(t)$ . Nos interesa conocer  $i$  y  $v$  a lo largo del cable. Esperamos soluciones en forma de ondas que se propagan hacia la derecha.

Al igual que en ecuaciones ordinarias es conveniente escribir (2.5) como matriz, con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{x=0} &= \begin{pmatrix} g(t) \\ i(0, t) \end{pmatrix}, t \geq 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Vemos que la ecuación (2.6) es análoga a la ecuación de primer orden, donde ahora el término de velocidad que multiplica a  $\frac{\partial}{\partial x}$  no es un escalar sino una matriz. Antes de resolver (2.6) consideremos el sistema diagonal

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

con condiciones iniciales  $w(x, 0) = f_1(x)$  y  $z(x, 0) = f_2(x)$ . En este caso tenemos un sistema donde la matriz está en forma diagonal. Vemos que (2.7) es equivalente a dos ecuaciones independientes (desacopladas)

$$\begin{aligned} w_t + \lambda_1 w_x &= 0, \\ z_t + \lambda_2 z_x &= 0 \end{aligned}$$

que se resuelve inmediatamente con  $w = f_1(x - \lambda_1 t)$ ,  $z = f_2(x - \lambda_2 t)$ .

Vemos pues que para un sistema como (2.7) no hay dificultades. Por esto, al igual que en ecuaciones ordinarias trataremos de transformar (2.6) a su forma diagonal mediante un cambio de variables dependientes.

Introducimos entonces el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

donde  $U$  es una matriz invertible que se determinará en el proceso de reducción. Sustituyendo (2.8) en (2.7), tenemos que

$$\begin{aligned} U \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Para que (2.9) sea como (2.7) debemos de escoger  $U$  de tal forma que

$$U^{-1} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Para satisfacer (2.10) basta encontrar los valores propios de

$$\begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

que son  $\lambda_1 = (Lc)^{-\frac{1}{2}}$  y  $\lambda_2 = -(Lc)^{-\frac{1}{2}}$ . Entonces (2.10) queda como:

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{L}{c}} \\ -1 & \sqrt{\frac{L}{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\frac{L}{c}} & \sqrt{\frac{L}{c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Lc)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(Lc)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

Transformando también las condiciones iniciales en (2.6) de acuerdo a (2.8) vemos que (2.6) es equivalente al sistema diagonal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (Lc)^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & -(Lc)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x \geq 0, \\ \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_{x=0} &= U^{-1} \begin{pmatrix} g(t) \\ i(0,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g(t) + \sqrt{\frac{L}{c}} i(0,t) \\ -g(t) + \sqrt{\frac{L}{c}} i(0,t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En (2.10) vemos que las ecuaciones para  $w$  y  $z$  se desacoplan y la situación se muestra en el plano  $(x, t)$  de la Fig. 2.2.

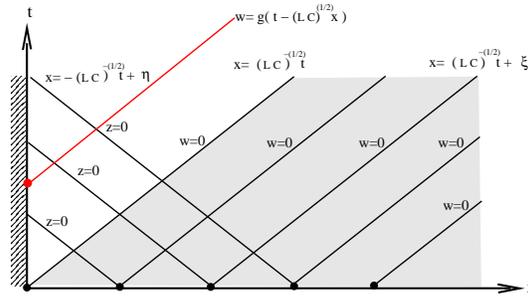


Fig. 2.2

Sabemos que  $w = \text{constante}$  y  $z = \text{constante}$  sobre las rectas características  $x = t/\sqrt{Lc} + \xi$  y  $x = -t/\sqrt{Lc} + \eta$  respectivamente. Por esto vemos que  $z = w = i = v = 0$  para  $(x, t)$  abajo de la línea  $x = t/\sqrt{Lc}$ . Esto nos dice, al igual que la ecuación de primer orden, que las señales emitidas en  $x = 0$  viajan con velocidad  $\frac{1}{\sqrt{Lc}}$  que depende de las propiedades del cable.

A lo largo de las características que viajan hacia la izquierda tenemos que  $z = 0$ , en particular  $z = 0$  sobre la recta  $x = 0$ . Esto determina  $i(0, t)$  ya que

$$0 = z(0, t) = -g(t) + i(0, t)\sqrt{\frac{L}{c}}, \quad i(0, t) = \sqrt{\frac{L}{c}}g(t).$$

El valor de  $w$  a lo largo de las características arriba de  $x = t/\sqrt{Lc}$  es

$$w(x, t) = g(t - \sqrt{Lc} x), \quad z(x, t) = 0. \quad (2.11)$$

De (2.11) pasamos a las variables originales usando (2.8) y obtenemos

$$v(t) = g(t - \sqrt{Lc} x), \quad i(t) = \sqrt{\frac{c}{L}}g(t - \sqrt{Lc} x). \quad (2.12)$$

Las fórmulas (2.12) representa ondas que viajan hacia la derecha sin distorsión con velocidad  $\frac{1}{\sqrt{Lc}}$ . Este es un modelo del telégrafo simple.

Queda como un ejercicio el resolver el problema con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

¿Qué condiciones deben cumplir  $f(x)$  y  $g(x)$  para que no se propaguen disturbios hacia la izquierda?. Estudiar en detalle el plano  $(x, t)$ .

## 2.2. La ecuación del telegrafista

En la sección anterior estudiamos el problema de una línea de transmisión, si observamos el modelo físico descubrimos que es una descripción de una línea telegráfica. Esta línea de transmisión la podemos entender como una cadena infinita de pequeños segmentos de circuitos eléctricos formados por un capacitor y una bobina que da la inductancia al circuito, tal como lo vemos en la figura Fig. 2.2a. En el siglo XIX la aparición del telégrafo cambió radicalmente el desarrollo de la economía, la política y la vida diaria de la gente al poder estar informada instantáneamente por las oficinas telegráficas. En 1815 Inglaterra se enteró inmediatamente de la victoria de Arthur

Wellesley sobre los ejércitos de Napoleón gracias al cable submarino que se había tendido previamente entre Francia e Inglaterra. Este impulso llevó a que en 1858 se decidiera tender el primer cable intercontinental comunicando Irlanda con Nueva Escocia. Al final de este costosísimo proyecto los gobernantes de ambos países, la reina Victoria y el presidente Buchanan se dispusieron a inaugurar esta línea trasatlántica de comunicación enviando sendos mensajes a través del océano, pero dicha comunicación fue todo un fracaso, tardaron 17 horas para recibir apenas un par de palabras. Unos años después, un muchacho que trabajaba en la compañía telegráfica llamado Oliver Heaviside retomó el problema para entender por qué no se podían comunicar usando el cable trasatlántico. Heaviside se dio cuenta que el cable telegráfico al estar inmerso en el océano tenía pérdidas a través del aislamiento con que se recubría el cable, además hay pérdidas por el mismo calentamiento del cable. De esta forma propuso un nuevo modelo de la cadena de circuitos eléctricos equivalentes con los que se podía modelar el cable, este nuevo diseño lo podemos ver en la figura Fig. 2.2b.

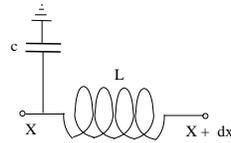


Fig. 2.2a

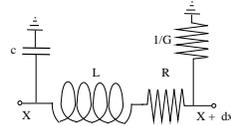


Fig. 2.2b

Ahora analicemos este modelo y escribamos las ecuaciones que lo representa, si  $v$  representa el voltaje respecto a tierra,  $i$  la corriente circulante,  $C$  la capacitancia,  $L$  la inductancia y  $R$  la resistencia del cable, estos últimos por unidad de longitud. Finalmente,  $G$  es la conductancia y que está relacionada con la corriente que se pierde a través del aislamiento del cable. Las ecuaciones (2.5) del modelo anterior quedan modificadas de esta forma:

$$\begin{aligned} c v_t + i_x + G v &= 0 \\ L i_t + v_x + R i &= 0 \end{aligned} \tag{2.13}$$

con las mismas condiciones que le hemos impuesto al sistema de ecuaciones 2.5). Para resolver este sistema de ecuaciones procederemos de una forma distinta a como lo hicimos para las ecuaciones 2.5), para ello despejaremos  $i_x$  de la primera ecuación de (2.13), quedando  $i_x = -c v_t - G v$ , ahora derivemos esta expresión respecto al tiempo quedándonos  $i_{tx} = -c v_{tt} - G v_t$ . Por otro lado derivemos la segunda ecuación de

2.13) respecto a la variable  $x$ , lo cual nos da  $L i_{xt} + v_{xx} + R i_x = 0$ . Si sustituimos  $i_{tx}$  de la primera expresión en la segunda obtenemos una ecuación diferencial parcia de segundo orden hiperbólica,

$$v_{xx} + R(-c v_t - G v) + L(-c v_{tt} - G v_t) = 0 \quad (2.14)$$

la cual llamaremos la ecuación del telegrafista, esta es una ecuación diferencial hiperbólica de segundo orden.

Esta es una ecuación de onda respecto al voltaje  $v$  pero donde tenemos nuevos términos que son la derivada de  $v$  y el término donde aparece solo el voltaje  $v$ . La pregunta es, ¿Cómo podemos resolver esta ecuación? Para mostrar una forma de simplificar esta ecuación hagamos estos cambios de las constantes:  $\gamma^2 = 1/(Lc)$ ,  $\alpha = G/c$  y  $\beta = R/L$ , de tal forma que ahora tenemos la siguiente ecuación

$$v_{tt} + (\alpha + \beta)v_t + \alpha\beta v = \gamma^2 v_{xx} \quad (2.15)$$

Primero examinemos este método general para eliminar los términos de primeras derivadas en las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden. Supongamos esta ecuación general de segundo orden hiperbólica respecto a la variable  $u$

$$u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} + b_1 u_t + b_2 u_x + a u = 0 \quad (2.16)$$

Para simplificar esta ecuación propongamos este cambio de variable

$$u(x, t) = w(x, t) e^{\lambda x + \mu t} \quad (2.17)$$

Veamos que cuando derivamos  $u$  respecto a  $t$  y  $x$  obtendremos así derivadas de  $w$  de la siguiente forma

$$\begin{aligned} u_t &= w_t e^{\lambda x + \mu t} + \mu w e^{\lambda x + \mu t} \\ u_{tt} &= w_{tt} e^{\lambda x + \mu t} + 2\mu w_t e^{\lambda x + \mu t} + \mu^2 w e^{\lambda x + \mu t} \\ u_x &= w_x e^{\lambda x + \mu t} + \lambda w e^{\lambda x + \mu t} \\ u_{xx} &= w_{xx} e^{\lambda x + \mu t} + 2\lambda w_x e^{\lambda x + \mu t} + \lambda^2 w e^{\lambda x + \mu t} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Al substituir (2.18) en (2.16) y factorizando el término  $e^{\lambda x + \mu t}$  obtenemos

$$w_{tt} + 2\mu w_t + \mu^2 w - \gamma^2 w_{xx} - 2\lambda\gamma^2 w_x - \gamma^2 \lambda^2 w + b_1 w_t + \mu b_1 w + b_2 w_x + b_2 \lambda w + a w = 0 \quad (2.19)$$

Al agrupar los términos que corresponden a  $w_t$  definimos a  $b_1 = -2\mu$  y en forma similar al agrupar los términos de  $w_x$  y definiendo  $b_2 = 2\lambda\gamma^2$  encontramos que podemos eliminar aquellos términos que dependen de una primera derivada, ya sea en  $t$  o en  $x$ . Al final obtenemos una ecuación de onda más simple, es decir

$$w_{tt} - \gamma^2 w_{xx} + \tilde{a} w = 0 \quad (2.20)$$

donde  $\tilde{a} = a + (\frac{b_1}{2})^2 + (\frac{b_2}{2\gamma})^2$

La ecuación (2.20) no tiene una solución simple en el sentido que no podemos aplicar el método de las características para resolverla. Si  $f$  es la condición inicial, al intentar aplicar el método de las características obtenemos  $\gamma^2 f'' - \gamma^2 f'' + \tilde{a}f = 0$ , es claro que solo cuando  $\tilde{a} = 0$  obtenemos una solución por este método. ¿Podemos preguntarnos que efecto tiene el término lineal en la ecuación de onda? Para dar una respuesta lo más simple posible pensemos que  $w$  representa un impulso y que dicho impulso lo podemos representar con ayuda de la teoría de Fourier como  $w = e^{i(\omega t - kx)}$  siendo  $\omega$  la frecuencia y  $k = 2\pi/l$  siendo  $l$  la longitud de onda. La velocidad de fase de la característica es entonces  $V = \omega/k$  donde es claro observar que dicha velocidad depende de la frecuencia y también de la longitud de onda, a esta relación se le conoce como la relación de dispersión. En la relación de dispersión es muy importante determinar como la longitud de onda depende de la frecuencia: Si sustituimos nuestro impulso  $w = e^{i(\omega t - kx)}$  en la ecuación (2.20) llegamos a que la siguiente relación debe cumplirse para que este impulso sea solución,  $\omega^2 - \gamma^2 k^2 + \tilde{a} = 0$ . De esta forma, la velocidad de fase  $V$  tiene la forma

$$V = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \tilde{a}}}\gamma \quad (2.21)$$

Es claro que para cada frecuencia  $\omega$  tenemos una velocidad de fase  $V$  distinta a menos que el parámetro  $\tilde{a} = 0$  que es el caso de la ecuación de onda lineal que hemos estudiado desde el principio. Esto significa que en la ecuación de onda lineal  $u_{tt} - \gamma^2 u_{xx} = 0$  la velocidad de fase es constante y no depende de la frecuencia.

¿Qué consecuencias tiene que la velocidad de fase dependa de la frecuencia? Para dar una respuesta pensemos en un paquete de onda, es decir, un conjunto de ondas simples con distintas frecuencias tal que al sumarlas forma dicho paquete, tal como lo visualizamos en la teoría de Fourier. El paquete puede tener una forma específica al tiempo cero, pero cuando se desplaza, cada frecuencia ira a su velocidad dada por la relación de dispersión, en el caso de la ecuación del telegrafista esta velocidad estaría dada por (2.21), de tal forma que después de cierto tiempo las fases de estas ondas simples se han cambiado y por lo tanto al sumarlas ya no representan el paquete original, dicho paquete se ha distorciónado por efecto de la dispersión de las ondas. Este fenómeno lo reconoció Heaviside y de esta forma encontro la razón por la cual era casi imposible mandar un mensaje por el cable trasatlántico porque cada paquete que representaba los impulsos del aparato de telégrafo era distorciónado dada la gran distancia que tenía que recorrer el impulso eléctrico. La solución que encontró Heaviside fue tratar de reducir o eliminar el término representado por  $\tilde{a}$ . Al tomar la ecuación del telegrafista (2.14) y eliminar las derivadas de primer orden tal como lo describimos en los párrafos anteriores obtenemos finalmente que el término  $\tilde{a}$  esta descrito de esta forma

$$\tilde{a} = - \left( \frac{cR - LG}{2} \right)^2 \quad (2.22)$$

de esta forma, si en la elaboración del cable submarino se cuida que los materiales usados cumplan la relación  $cR = LG$  se eliminará el efecto de dispersión del cable.

La forma que tendrá la corriente que circula finalmente por el cable será

$$i(x, t) = e^{-\delta t} f(x - \gamma t) \quad (2.23)$$

siendo  $\delta = R/L = G/C$ ,  $\gamma = 1/\sqrt{L}c$  y  $f$  la condición de frontera inicial.

Al hacer el nuevo cable trasatlántico y tenderlo en 1866 se logró transmitir a una velocidad de 8 palabras por minuto y un poco después se aumentó dicha velocidad a 120 palabras por minuto, iniciando así la comunicación mundial entre todos los habitantes del planeta.

### 2.3. Propagación de ondas en agua

Consideremos ahora otro problema que da origen a un sistema de ecuaciones muy parecido al estudiado en (2.5). Este sistema aparece al analizar la propagación de ondas en agua. En primer lugar plantearemos las ecuaciones y después las resolveremos de una manera muy similar a las de líneas de transmisión.

Las ecuaciones de movimiento son un caso particular de las ecuaciones de *Navier – Stokes*, pero nosotros las deduciremos directamente. Para esto consideremos un fluido que se mueve con velocidad horizontal  $u$ , vertical  $w$ , y cuya superficie libre está descrita por  $\eta(x, t)$  tal como se ve en la Fig. 2.3. Supondremos además que el fondo de la playa tiene una profundidad constante.

Usando en la Fig. 2.3 la ley de la conservación de la masa entre  $x_0$  y  $x$  tenemos lo

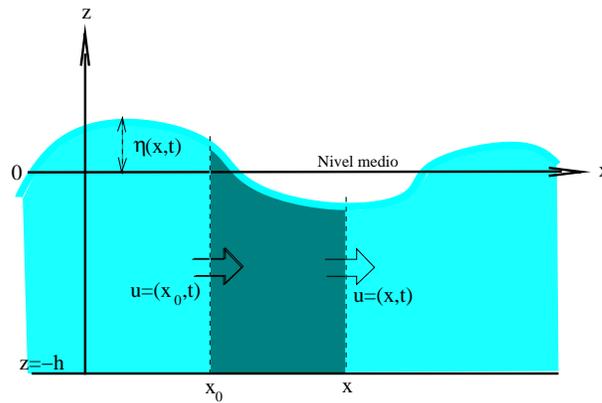


Fig. 2.3

siguiente, si la masa  $M$  está definida como

$$M = \int_{x_0}^x (h + \eta(\xi, t)) d\xi ,$$

donde consideramos la densidad del agua igual a la unidad, entonces

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{x_0}^x (h + \eta(\xi, t)) d\xi &= \text{rapidez de cambio de la cantidad de agua entre } x_0 \text{ y } x \\ &= \text{Agua que entra en } x_0 - \text{Agua que sale en } x \\ &= \text{Flujo en } x_0 - \text{Flujo en } x. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Expresando en (2.24) el flujo en términos de  $u$  y  $\eta$  como  $u(x, t)\{h + \eta(x, t)\}$ , tenemos que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x (h + \eta(\xi, t)) d\xi = u(x_0, t)\{h + \eta(x_0, t)\} - u(x, t)\{h + \eta(x, t)\} \quad (2.25)$$

Podemos ignorar en (2.25) los productos  $u\eta$  (ya que suponemos olas no muy altas excluyendo fenómenos de rompimiento). Como  $|x - x_0| \ll 1$ , la integración la podemos aproximar por el área del rectángulo cuya base es  $x - x_0$  y su altura es  $h + \eta(x, t)$ , donde  $h$  es un parámetro constante, al derivar no va a quedar entonces  $\eta_t(x, t)(x - x_0)$ . Si pasamos el término  $x - x_0$  dividiendo del lado derecho de (2.25) y tomando el límite de  $x \rightarrow x_0$  vemos que la ecuación (2.25) queda transformada por

$$\eta_t + hu_x = 0. \quad (2.26)$$

Nuevamente (2.26) es una ecuación para dos incógnitas. La otra ecuación se encuentra de la dinámica usando la ley de Newton donde las únicas fuerzas involucradas son los cambios de presión del agua en la dirección horizontal y vertical y la fuerza de gravedad. Entonces encontramos que

$$\begin{aligned} u_t &= \text{aceleración horizontal} = -\text{cambio de presión en } x = -p_x, \\ w_t &= \text{aceleración vertical} = -\text{cambio de presión en } z - g = -p_z - g. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones que controlan al movimiento del líquido son

$$\eta_t + hu_x = 0, \quad u_t + p_x = 0, \quad w_t + p_z + g = 0, \quad (2.28)$$

este es un sistema de tres ecuaciones para cuatro incógnitas. Debemos cerrar el sistema y para esto haremos una aproximación muy drástica en la última ecuación (2.28). Supondremos que la aceleración vertical  $w_t \ll 1$  y que  $p_z$  balancea a la fuerza de gravedad, es decir

$$p_z = -g. \quad (2.29)$$

En otras palabras decimos que el movimiento en la dirección vertical es tan pequeño que la presión está dada por la ley hidrostática (2.29). El valor de  $p$  lo tenemos integrando (2.29) entre la superficie libre y un punto del fluido, obteniendo así

$$p(x, \eta, t) - p(x, z, t) = \int_z^{\eta(x, t)} p_\xi(x, z, t) d\xi = - \int_z^{\eta(x, t)} g d\xi = -g(\eta(x, t) - z). \quad (2.30)$$

Como el valor de  $p(x, \eta, t)$  = presión atmosférica, entonces la podemos tomar como cero y tener

$$p(x, z, t) = g(\eta(x, t) - z) \quad (2.31)$$

que es la ley de la presión hidrostática. Sustituyendo (2.31) en (2.28) tenemos

$$\begin{aligned} \eta_t + hu_x &= 0, \\ u_t + g\eta_x &= 0, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones para la propagación de ondas. Desde luego deben ser suplementadas por condiciones iniciales y de frontera.

El problema que resolveremos ahora es el de un pulso que se produce en un estanque de agua y viaja parte hacia la derecha del estanque y parte hacia la izquierda, donde encuentra paredes y se refleja. Nos interesa determinar la altura del agua en cada punto del estanque como función del tiempo. El problema por resolver es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0, \quad (2.32)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} \eta(0, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \geq 0 \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} \eta(l, t) \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \geq 0, \quad (2.35)$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Notemos en (2.32) que en los extremos, el valor de  $\eta$  debe determinarse como parte del problema. Supondremos además que  $f(x)$  está concentrada en el centro del estanque. Para resolver (2.32) procedemos como en (2.8) e introducimos el cambio de variables

$$\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{\frac{g}{h}} & \sqrt{\frac{g}{h}} \end{pmatrix}; \quad U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{h}{g}} \\ -1 & \sqrt{\frac{h}{g}} \end{pmatrix}$$

obtenemos el sistema diagonal

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{gh} & 0 \\ 0 & -\sqrt{gh} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_x &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} &= U^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t=0, \\ \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_{x=0} &= U^{-1} \begin{pmatrix} \eta(0,t) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}_{x=l} = U^{-1} \begin{pmatrix} \eta(l,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.37}$$

donde las funciones  $\eta(0,t)$  y  $\eta(l,t)$  deben determinarse en la solución de (2.37). Al estudiar (2.37) usamos el plano  $(x,t)$  y observamos que  $w$  es constante a lo largo de las rectas  $x = \sqrt{gh} t + \xi$ , y  $z$  es constante a lo largo de las rectas  $x = -\sqrt{gh} t + \zeta$ , dichas rectas son precisamente las rectas características del problema. La situación se muestra en detalle en la Fig. 2.4.

Construiremos ahora la solución geoméricamente, tal como lo hicimos en el caso de

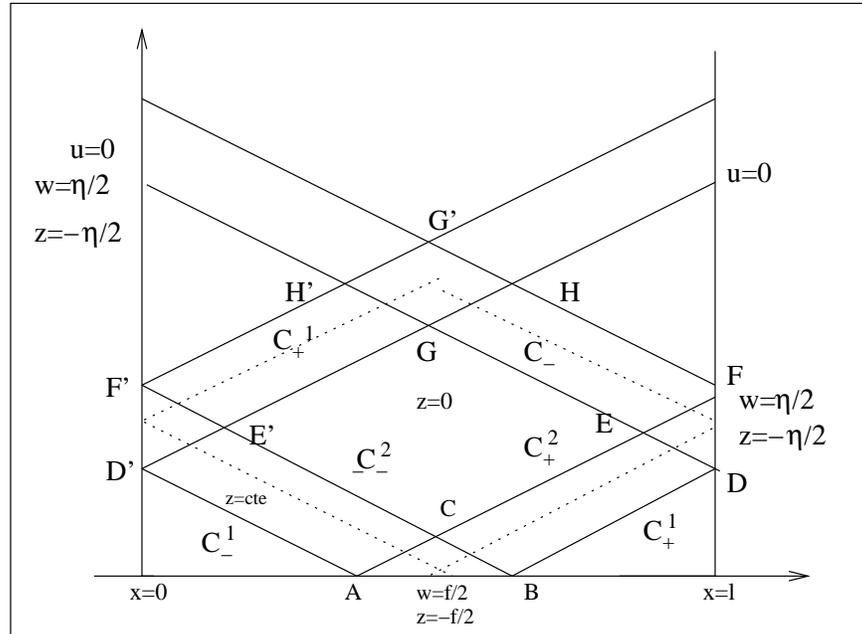


Fig. 2.4

la ecuación de onda. Empezaremos por la zona entre  $C_+^1$  y  $C_+^2$ ; como  $w$  es constante tenemos que en esa zona fuera de los triángulos ABC y DEF, la solución es

$$r = \frac{1}{2} f(x - \sqrt{gh} t), \quad z = 0.$$

Dentro del triángulo ABC tenemos que

$$r = \frac{1}{2}f(x - \sqrt{gh} t), \quad s = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t).$$

Ahora examinemos lo que sucede cuando el pulso llega a la pared ( $x = l$ ). Vemos que el disturbio que llega por la característica  $C_+$  determina el valor  $\eta(l, t)$  ya que

$$\eta(l, t) = 2r(l, t) = f(l - \sqrt{gh} t).$$

Este valor se transporta a lo largo de  $C_-$  y nos da que en la región  $EFHG$ , la solución es

$$s(x, t) = -\frac{1}{2}\eta\left(l, \frac{x-l}{\sqrt{gh}} + t\right) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad r(x, t) = 0.$$

En el triángulo DEF tenemos que

$$s(x, t) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad r(x, t) = \frac{1}{2}f(x - \sqrt{gh} t).$$

En la región a la izquierda de A se repite el mismo proceso y tenemos que en la región ACDE:

$$s(x, t) = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t), \quad r(x, t) = 0.$$

También la característica  $C_-^1$  choca contra la pared en  $x = 0$  y determina el valor

$$\eta(0, t) = -\frac{1}{2}s(0, t) = f(\sqrt{gh} t)$$

y de esta ecuación se sigue que el valor de  $w$  en  $C_+^1$  es

$$r(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

En el triángulo DE'F' la solución es

$$s(x, t) = -\frac{1}{2}f(x + \sqrt{gh} t), \quad r(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

Finalmente en la región GHG'H' la solución es

$$s(x, t) = -\frac{1}{2}f(2l - x - \sqrt{gh} t), \quad r(x, t) = \frac{1}{2}f(\sqrt{gh} t - x).$$

Otra forma de resolver el problema del rebote de las ondas de agua en las paredes es utilizar el método de las imágenes. Para este caso solo debemos reflejar la condición

inicial en las paredes colocadas en  $x = 0$  y  $x = l$  tal como lo vemos en la figura Fig. 2.4a, para ello vamos a reflejar sobre las rectas  $x = 0$  y  $x = l$  la condición inicial. Podemos ver entonces que las rectas características que se propagan hacia la izquierda de la condición inicial en la región  $(l, 2l)$  van a sumarse con las rectas características que vienen de la condición inicial original colocada en  $(0, l)$ . Lo mismo va a suceder con las rectas características que se propagan hacia la derecha y que provienen de la condición inicial reflejada que está colocada en  $(-l, 0)$ . Esta primera construcción nos permite entender el primer rebote de las olas que se propagan hacia la derecha y a la izquierda, así al chocar con la pared el resultado es la suma de las características que llegan tanto a  $x = 0$  como a  $x = l$ . La suma de ambas características hacen que el pulso del agua crezca al doble de altura cuando colisiona con la pared, este efecto lo solemos ver en las albercas y es por eso que al hacer el método de imágenes solo hicimos una sola reflexión sobre los ejes verticales y no sobre los horizontales. Para

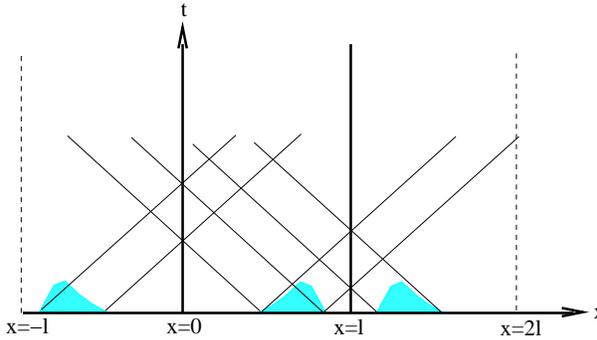


Fig. 2.4a

las siguientes reflexiones del pulso de agua vamos a repetir la condición inicial en las regiones colocadas en  $(-2l, -l)$  y en  $(2l, 2l)$  las condiciones iniciales que colocamos en  $(-l, 0)$  y en  $(l, 2l)$  respectivamente pero haciendo el reflejo en los ejes  $x = -l$  y en  $x = 2l$  respectivamente. Esta construcción nos permitirá encontrar como las rectas características se reflejan en los ejes  $x = 0$  y en  $x = l$ . El procedimiento se puede repetir continuamente tanto como sea necesario.

La solución en las variables originales puede obtenerse multiplicando  $(w, z)^T$  por  $U^{-1}$ . Queda como un ejercicio verificar que la solución que hemos obtenido es efectivamente una solución de (2.32). De igual manera se deja como ejercicio encontrar la solución de este problema para tiempos posteriores.

Otro ejercicio es encontrar la solución del problema

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=0} &= \begin{pmatrix} f(t) \\ u(0,t) \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{x=l} = \begin{pmatrix} \eta(l,t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \eta \\ u \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde la función  $f$  es conocida y las funciones  $u(0,t)$  y  $\eta(l,t)$  están por determinarse. ¿Cuál es la interpretación de la solución?

En general, los sistemas de ecuaciones de la forma

$$u_t + Au_x = 0, \quad u(x,0) = g(x),$$

donde  $u$  es un vector y  $A$  una matriz (que mediante una transformación lineal se pueden pasar a un forma diagonal), se llaman sistemas simétricos hiperbólicos. Las rectas  $x = \lambda_1 t + \xi$ ,  $x = \lambda_2 t + \eta$ , donde  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  son los valores propios de  $A$  se llaman las características del sistema. El método que empleamos para construir las soluciones prueba su existencia y unicidad. Se deja como un ejercicio el poner las hipótesis apropiadas sobre  $f$  y dar el detalle de los argumentos. Para mayores detalles y un tratamiento más avanzado y completo referimos al lector a las notas de *J.Ize* [8]

## 2.4. Las ecuaciones de Maxwell

Discutiremos ahora el sistema de ecuaciones parciales que describen el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos producidos por cargas y corrientes. Las ecuaciones de Maxwell son el resumen y formulación cuantitativos de la experiencia que se tiene con cargas, corrientes y sus interacciones. Estas ecuaciones no se deducen. En electricidad, son el equivalente a la ley de Newton en mecánica. A continuación describimos esquemáticamente algunos experimentos que dieron origen a las leyes que hoy formulamos en términos de las ecuaciones de Maxwell.

En primer lugar recordemos que el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$  es un vector que depende de la posición y del tiempo. Es un hecho experimental que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada que encierra una carga  $Q$ , es proporcional a dicha carga. Esta es la ley de Gauss. En cantidades, si  $S$  es la superficie que acota a la carga  $Q$  y  $\mathbf{n}$  el vector normal a  $S$ , tenemos que

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{flujo de } \mathbf{E} \text{ a través de } S = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.38)$$

y al escribir en (2.38)

$$Q = \int_V \rho(x,t) dx$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga, tenemos usando el Teorema de la Divergencia, que

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.39)$$

que es la expresión cuantitativa de la ley de Gauss.

También es un hecho experimental que las líneas de fuerza de un campo magnético son siempre cerradas. Si  $\mathbf{B}$  es el vector de campo magnético, el hecho anterior se expresa matemáticamente como

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Esta ecuación también nos dice que no es posible tener monopolos magnéticos, en cambio la ley de Gauss nos indique que es posible tener monopolos o cargas eléctricas aisladas.

Ahora pasamos a estudiar las leyes que controlan la interacción de campos eléctricos y magnéticos. Estas leyes antes de Maxwell eran la ley de Faraday y la ley de Ampere. Empezaremos por recordar la ley de Faraday. Esta ley resume el hecho experimental de que si el flujo de un campo magnético  $\Phi(t)$  que pasa a través de una superficie acotada  $S$  por una espira de cable  $C$  tal que este flujo cambie con el tiempo tal como lo vemos en la figura Fig. 2.4b, entonces en el cable se induce un voltaje  $V(t)$  que es proporcional y de signo contrario al cambio del flujo. La expresión cuantitativa de esta ley (en el lenguaje moderno de los vectores, desconocido para Faraday) es

$$V(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt}, \quad (2.40)$$

donde  $V$  es el voltaje en la espira y  $\Phi$  el flujo de  $\mathbf{B}$  a través de  $S$ .

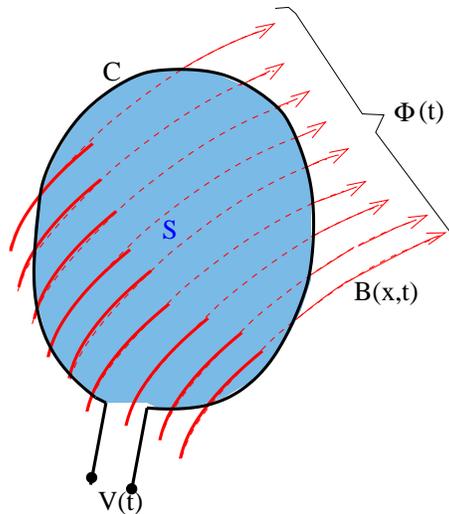


Fig. 2.4b

Escribiendo la (2.40) en términos de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$ , donde  $V$  puede escribirse como la integral de trabajo hecho por el campo eléctrico a través del camino de la

espira  $\mathcal{C}$ , tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \, dS, \quad (2.41)$$

donde  $\mathcal{C}$  es la curva que forma la espira. Usando el Teorema de Stokes en (2.41) tenemos que

$$\mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

que es la expresión matemática de la ley de Faraday.

Por último discutiremos la ley de Ampere que es la expresión cuantitativa del hecho experimental de que al pasar una corriente eléctrica por un cable, se forma un campo magnético alrededor de dicho cable cuya circulación es proporcional a la intensidad de la corriente. Esta situación se muestra esquemáticamente en la Fig. 2.5.

Cuantitativamente la ley de Ampere se expresa así

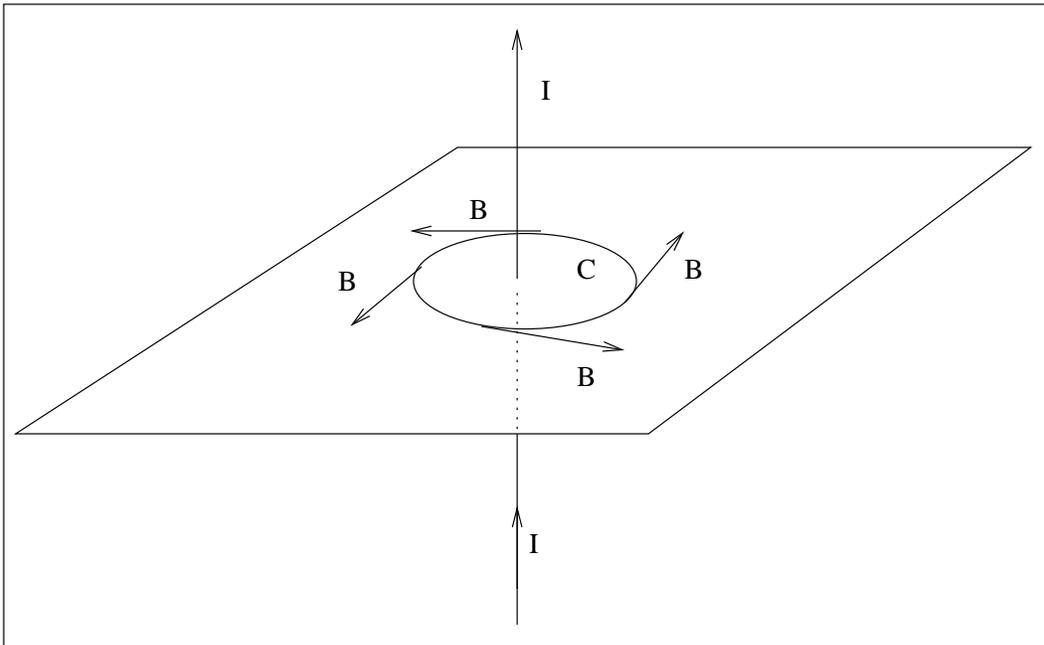


Fig. 2.5

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \text{circulación de } \mathbf{B} \text{ alrededor de } \mathcal{C} \\ &= \mu_0 \text{ intensidad de corriente} = \mu_0 I = \int_S \mu_0 \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{J}$  es la intensidad de corriente que pasa por el alambre. Usando nuevamente el Teorema de Stokes obtenemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.43)$$

Las leyes del electromagnetismo conocidas antes de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & (i) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & (ii) \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, & (iii) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}. & (iv) \end{aligned} \quad (2.44)$$

Se pensaba que estas ecuaciones podían describir los fenómenos del electromagnetismo. En realidad la ley de Ampere fue encontrada sólo para corrientes estacionarias ( $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ ) e independientes del tiempo, por lo tanto no hay ninguna razón para suponerlas válidas cuando  $\nabla \cdot \mathbf{J} \neq 0$  y  $\mathbf{J}$  cambia con el tiempo. Sin embargo, durante muchos años se usaron estas ecuaciones y los resultados obtenidos concordaban con el experimento. La idea del proceso que representan las ecuaciones (2.44) (que de hecho es la manera natural de resolverlas) es que  $\mathbf{J}$  determina a  $\mathbf{B}$  a través de (iv) de manera instantánea. Los cambios de  $\mathbf{J}$  producen a su vez cambios en  $\mathbf{B}$  que mediante (iii) producen cambios en  $\mathbf{E}$ .

Un examen más cuidadoso muestra que (i) y (iv) son inconsistentes con la ley de conservación de carga  $\rho_t + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , que sabemos vale para situaciones dependientes del tiempo. Esta inconsistencia se debe a que (iv) nos da  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , lo cual es consecuencia de que la ley de Ampere sólo vale para corrientes estacionarias. La razón del éxito de (2.44) es que cuando se usaba la conservación de carga no se usaba (iv) y viceversa. Por otro lado también encontramos una inconsistencia en la ley de conservación de cargas: consideremos a  $Q$  la carga y  $\frac{dQ}{dt}$  el flujo de cargas el cual es idéntico a la corriente  $J$  que fluye por una superficie  $S$  cerrada y que encierra el volumen  $Vol$ . Esto lo podemos expresar como

$$\int_{Vol} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\bar{x} = \int_S J \cdot \hat{n} ds \quad (2.45)$$

siendo  $\rho$  la densidad de carga. Cuando aplicamos el teorema de Gauss a la segunda integral obtenemos

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot J \quad (2.46)$$

Pero como  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  nos lleva a que  $\rho_t = 0$ , diciendo que no puede cambiar la densidad de carga en el tiempo.

Fue Maxwell el que modificó la ley de Ampere (iv) para ser consistente con los experimentos. A (iv) le añadió un nuevo término, que según él pensaba, se debía al movimiento del “éter” (que hoy sabemos no existe). Por analogía a lo que pasa en

otras situaciones, tomó esa corriente como proporcional a  $E_t$ ; modificando la ley de Ampere para tener en cuenta a esa corriente en la forma

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \mathbf{E}_t). \quad (2.47)$$

de tal forma que si tomamos la divergencia en la expresión (??),

$$0 = \nabla \cdot \left( \mu_0 \left( J + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \right) = \mu_0 (\nabla \cdot J + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot E) = \mu_0 (\nabla \cdot J + \epsilon_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}) \quad (2.48)$$

de tal forma que  $\nabla \cdot J$  es igual a  $-\epsilon_0 \rho_t$  o bien  $J$  es igual a  $-\epsilon_0 E_t$ , de ahí que a este término se le llame corriente de desplazamiento. Remitimos al lector al trabajo original de Maxwell [11] (editado por Dover) para una lectura sobre estos argumentos. Con (2.47) las ecuaciones del electromagnetismo que hoy conocemos como Ecuaciones de Maxwell son:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, (i)' \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, (ii)' \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, (iii)' \\ \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E}_t - \nabla \times \mathbf{B} &= -\mu_0 \mathbf{J}, (iv)' \end{aligned} \quad (2.49)$$

que deben estar suplementadas por condiciones iniciales y de frontera. Queda ahora como un ejercicio mostrar que si  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  satisfacen (iii)'y (iv)'y además  $\rho$ ,  $\mathbf{J}$  satisfacen la ecuación de continuidad, entonces  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  satisfacen automáticamente (i)'y (ii)'. Esto nos muestra que dadas  $\rho$  y  $\mathbf{J}$  que cumplen la ecuación de continuidad, debemos resolver (iii)'y (iv)'para determinar los campos.

Notemos que (i)'hasta (iv)' implican un proceso diferente en la generación de  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  que el dado por (i) hasta (iv). Examinando (iv) vemos que en general  $\nabla \times \mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{J}$  y que este desbalance produce un cambio  $\mathbf{E}_t$  el que a su vez, por medio de (iii)', produce un cambio en  $\mathbf{B}$ .

Queda el problema de examinar por qué las ecuaciones (i)-(iv) dan buenos resultados cuando las ecuaciones reales son (i)'-(iv)'.

### 2.4.1. Generación de una onda plana

En esta sección queremos mostrar que las ecuaciones de Maxwell pueden producir ondas que se propagan en el espacio donde los campos eléctricos y magnéticos oscilan en el tiempo y en el espacio creando así una onda que se propaga. Algo que fue trascendental en el desarrollo de la Física del siglo XIX y XX es el hecho que estas ondas electromagnéticas transportan energía, lo cual ha sido la base para el desarrollo de toda la tecnología moderna de telecomunicaciones.

El problema más sencillo de propagación de ondas en el espacio es la onda plana, estudiaremos este caso para entender como se genera una onda plana electromagnética

nos servirá para ilustrar el manejo de (i)'-(iv)'.

Consideremos pues el problema de determinar el campo eléctrico y magnético producidos por una corriente que circula en un plano delgado infinito tal como se muestra en la Fig. 2.6.

Supondremos que  $J_3(t)\hat{\mathbf{k}}$  es diferente de cero en la franja  $-\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}$  y sólo para

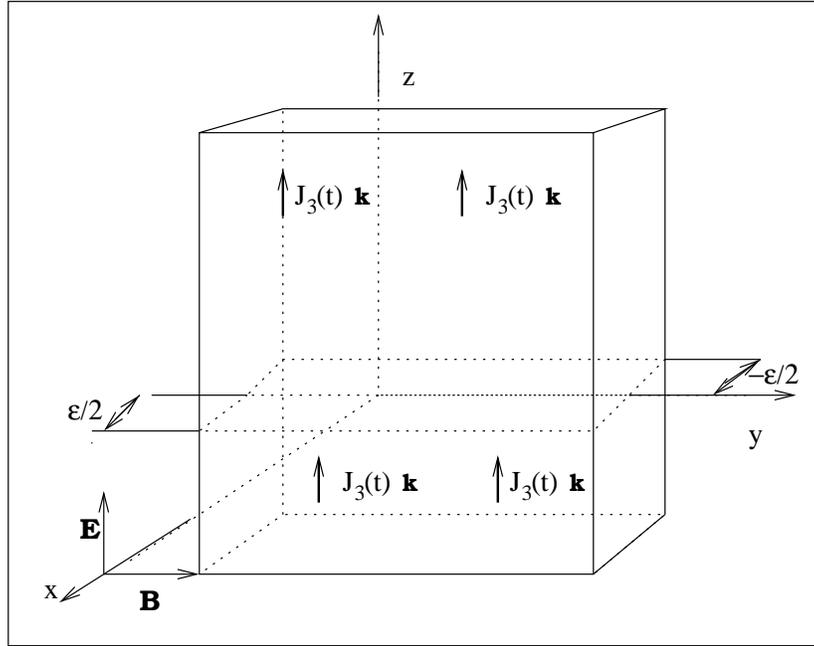


Fig. 2.6

$t \geq 0$ . Supondremos también que  $\rho = 0$ , es decir que no hay densidad de carga, y que los campos  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  si  $t = 0$ . Debemos notar que no debe haber dependencia en  $y, z$  por el hecho que el plano delgado es infinito y entonces el problema es invariante a traslaciones en la dirección  $y$  y también en la dirección  $z$ . Así podemos buscar una solución de (iii)'y (iv)'que dependa solamente de  $x$  y  $t$ . En este caso podemos representar los vectores del campo eléctrico y magnético como

$$\mathbf{E} = (E^1, E^2, E^3), \quad \mathbf{B} = (B^1, B^2, B^3),$$

así considerando que dichos campos son independientes de las coordenadas  $y, z$  observamos que las ecuaciones (2.49) en componentes son

- 1)  $E_x^1 = 0,$
- 2)  $B_x^1 = 0,$

$$\begin{aligned}
3) \quad & B_t^1 = 0, \\
4) \quad & B_t^2 - E_x^3 = 0, \\
5) \quad & B_t^3 + E_x^2 = 0, \\
6) \quad & \epsilon_0 \mu_0 E_t^1 = 0, \\
7) \quad & \epsilon_0 \mu_0 E_t^2 - B_x^3 = 0, \\
8) \quad & \epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 = -\mu_0 J_3(t).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Debido a que las derivadas con respecto a  $z$  y  $y$  son cero. Además sabemos que  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = \mathbf{0}$  en  $t = 0$ . De 1), 2), 3), 6) concluimos que  $E^1 = B^1 = 0$  para  $t \geq 0$  (se deja como ejercicio el hacer los detalles). De 5) y 7) vemos que

$$B_{tt}^3 = \epsilon_0 \mu_0 B_{xx}^3, \quad B^3(x, 0) = B_t^3(x, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} E^2(x, 0) = 0,$$

debido a las condiciones iniciales. Por el teorema de unicidad para la ecuación de onda vemos que  $B^3 = 0$  si  $t \geq 0$ . De la misma forma vemos que  $E^2 = 0$ ; quedando como ejercicio comprobar esto. Las ecuaciones (2.50) se reducen a

$$\begin{aligned}
B_t^2 - E_x^3 &= 0, \\
\epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 &= -\mu_0 J_3(x, t), \\
B^2(x, 0) &= E^3(x, 0) = 0,
\end{aligned} \tag{2.51}$$

que es un sistema hiperbólico no homogéneo parecido a los ya estudiados.

Antes de resolver (2.51) haremos una aproximación muy común en matemáticas aplicadas. Se considerará una lámina de ancho cero, y la corriente total que circula por ella se mantendrá finita. Lo anterior se logra tomando

$$J_3(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} j(t) & -\frac{\epsilon}{2} \leq x \leq \frac{\epsilon}{2}, \\ 0 & |x| \geq \frac{\epsilon}{2}, \end{cases}$$

ya que en este caso la cantidad de corriente que circula es  $j(t)$ . Entonces podemos reemplazar la segunda ecuación (2.51) por

$$\epsilon_0 \mu_0 E_t^3 - B_x^2 = 0.$$

Sin embargo la función  $B^2$  no será continua en  $x = 0$ , ya que integrando la segunda ecuación de (2.51) tenemos

$$\epsilon_0 \mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} E_t^3 dx - \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} B_x^2 dx = -\mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{j(t)}{\epsilon} dx,$$

de donde se sigue que

$$\epsilon_0 \mu_0 \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} E_t^3 dx - B^2\left(\frac{\epsilon}{2}, t\right) + B^2\left(-\frac{\epsilon}{2}, t\right) = -\mu_0 j(t)$$

y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , suponiendo  $E_t^3$  acotado, obtendremos que

$$B^2(0^+, t) + B^2(0^-, t) = \mu_0 j(t).$$

De la misma forma la primera ecuación (2.51) nos da

$$E^3(0^+, t) + E^3(0^-, t) = 0.$$

Finalmente las ecuaciones para el campo  $E^3$  y  $B^2$  son:

$$\begin{aligned} B_t^2 - E_x^3 &= 0, & |x| > 0, \\ c^{-2} E_t^3 - B_x^2 &= 0, & |x| > 0, \quad c^2 = \mu_0 \epsilon_0, \\ E^3 = B^2 &= 0, & t = 0, \\ E^3(0^+, t) - E^3(0^-, t) &= 0, & t \geq 0, \\ B^2(0^+, t) - B^2(0^-, t) &= \mu_0 j(t), & t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Podemos resolver (2.52) diagonalizando la matriz y procediendo como en (2.8). Sin embargo es conveniente identificar las direcciones características directamente de la ecuación (2.52). Para esto sumamos y restamos las ecuaciones (que es equivalente a multiplicar por  $U$ ) y llamando  $E^3 = E$  y  $B^2 = B$ , obtenemos que

$$\begin{aligned} (c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x})(E - cB) &= 0 \\ (c^{-1} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x})(E + cB) &= 0 \\ (E \pm cB) &= 0, \quad t = 0, \\ (E \pm cB)(0^+, t) - (E \pm cB)(0^-, t) &= \pm c \mu_0 j(t), \quad t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.53}$$

De acuerdo con (2.53) vemos en el plano  $(x, t)$  de la Fig. 2.4 que

$$\begin{aligned} E - cB &= cte. \quad \text{a lo largo de } x = ct + \xi, \\ E + cB &= cte. \quad \text{a lo largo de } x = -ct + \eta. \end{aligned}$$

En la Fig. 2.4 vemos que en la región a la derecha de  $x = ct$  y a la izquierda de  $x = -ct$ ,  $E = B = 0$  ya que las características a través de esos puntos llevan el valor inicial cero. Concluimos pues que los campos eléctricos y magnéticos se propagan con velocidad  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ . Calculemos ahora el valor de la solución en  $P$ . A través de  $P$  pasa la característica  $C_-$ , con lo cual

$$E + cB = 0 \quad \text{en } (x, t) = P. \tag{2.54}$$

También pasa la característica  $C^+$  y a lo largo de ella se tiene que  $E - cB$  es constante. De aquí que

$$(E - cB)(x, t) = (E - cB)(0, t - \frac{x}{c}). \tag{2.55}$$

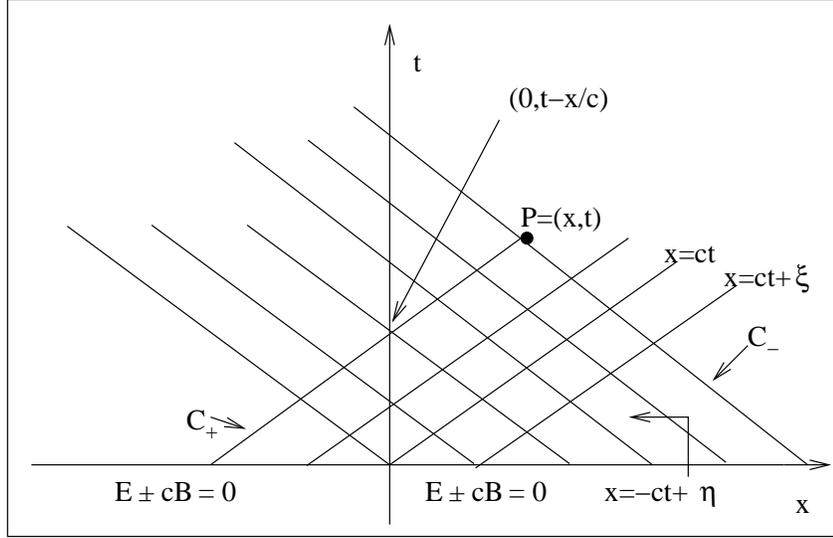


Fig. 2.7

Nos falta calcular  $E - cB$  a lo largo de la recta  $x = 0$ . Para esto usamos la relación que nos da la discontinuidad de  $E - cB$  en  $x = 0$ . De la Fig. 2.7 vemos que cuando  $x < 0$ ,  $E - cB = 0$ , de donde obtenemos que

$$(E - cB)(0, \tau) = -c\mu_0 j(\tau).$$

Usando esta ecuación así como las ecuaciones (2.54) y (2.55), obtenemos

$$(E + cB)(x, t) = 0, \quad (E - cB)(x, t) = -c\mu_0 j\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

de donde se encuentra que

$$E(x, t) = -\frac{c\mu_0}{2} j\left(t - \frac{x}{c}\right), \quad B(x, t) = \frac{\mu_0}{2} j\left(t - \frac{x}{c}\right). \quad (2.56)$$

En forma similar (queda como ejercicio el verificarlo) tenemos que para  $x > 0$

$$E(x, t) = -\frac{c\mu_0}{2} j\left(t + \frac{x}{c}\right), \quad B(x, t) = -\frac{\mu_0}{2} j\left(t + \frac{x}{c}\right). \quad (2.57)$$

Las ecuaciones (2.56) y (2.57) representan ondas que se propagan con velocidad  $c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  hacia la derecha y hacia la izquierda respectivamente. Estas son las ondas electromagnéticas que son la predicción de las ecuaciones de Maxwell y uno de los descubrimientos más grandes del siglo pasado. Nótese que en un punto fijo  $x_0$ ,  $E =$

$B = 0$  hasta que  $t = x_0/c$ , tiempo que tarda en llegar la primera señal. Esto nos muestra que los campos no se producen instantáneamente, sino que viajan con una velocidad finita.

Se deja como un ejercicio el resolver las ecuaciones de Maxwell cuando se tiene una pared en  $x = l$ . Si suponemos a la pared conductora, tenemos que  $E = 0$  en  $x = l$ . Las ecuaciones por resolver son:

$$\begin{aligned} B_t - E_x &= 0, & -\infty < x < 0, & 0 < x \leq l, & t > 0, \\ E_t - c^2 B_x &= 0, & -\infty < x < 0, & 0 < x \leq l, & t > 0, \\ E = B &= 0, & t = 0, \\ E(0^+, t) - E(0^-, t) &= 0, & t \geq 0, \\ B(0^+, t) - B(0^-, t) &= \mu_0 j(t), & t \geq 0. \end{aligned}$$

Suponiendo que  $j(t)$  tiene la forma

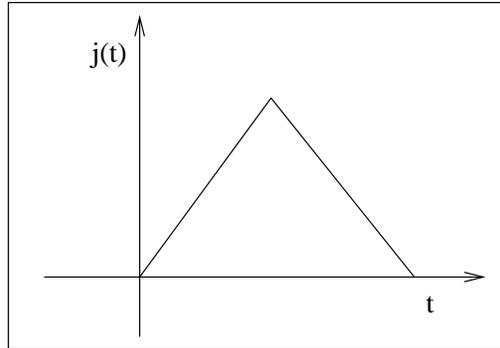


Fig. 2.8

Discuta en detalle los campos para  $0 \leq x \leq l$ . Para terminar esta sección veamos cómo las ecuaciones (i)-(iv) son una aproximación a (i)'-(iv)én el sentido que las soluciones de (i)'-(iv)'se parecen a las soluciones de (i)-(iv) para ciertos valores de  $(x, t)$ .

Vemos de (2.56) que cuando  $\frac{x}{c} \ll t$  (es decir  $x$  está cerca del objeto emisor) podemos aproximar (2.56) por su serie de Taylor en la forma

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2} j(t) + \theta\left(\frac{1}{c}\right), \\ E &= -\frac{c\mu_0}{2} j(t) + \frac{x\mu_0}{2} j'(t) + \theta\left(\frac{1}{c}\right). \end{aligned} \quad (2.58)$$

Observemos que (2.58) son soluciones de (i)-(iv) apropiadas a esta situación. Es decir, soluciones de

$$\begin{aligned} B_t - E_x &= 0, & B_x &= 0, \\ E(0^+, t) - E(0^-, t) &= 0, & B(0^+, t) - B(0^-, t) &= \mu_0 j(t). \end{aligned}$$

En el caso  $x \ll ct$  (que es frecuente ya que  $c$  es grande por ser la velocidad de la luz) las ecuaciones (i)-(iv) proveen una buena descripción del fenómeno. En particular, de (2.58) vemos que  $B$  y luego  $E$  son producidos instantáneamente. Sin embargo, las ecuaciones (i)-(iv) no pueden describir el fenómeno de propagación para  $x$  cercanas a  $ct$ . Resultará de interés para el lector comparar esta discusión con la del Vol. II del libro “Lectures on Physics” de Feynmann [5] donde se discute este problema con argumentos físicos.



## Capítulo 3

# Ecuaciones elípticas

### 3.1. Introducción y algunos problemas típicos

Las ecuaciones elípticas describen situaciones que no cambian en el tiempo, o bien situaciones que son en cierta forma periódicas y cuya dependencia temporal puede eliminarse reduciéndose a un problema estático. Aparecen en varios campos de aplicación, y nosotros discutiremos algunos problemas típicos en elasticidad, mecánica de fluidos y electrostática. En esta sección discutimos algunos problemas tipo.

#### 3.1.1. Ecuación de una membrana elástica en equilibrio

Tomamos una membrana elástica con una fuerza de restitución  $T$  por unidad de longitud. Nos interesa saber qué forma adopta la membrana bajo su propio peso cuando se encuentra, rígidamente sujeta en su borde, a la posición de equilibrio.

Fijamos el sistema de coordenadas tal como se muestra en la figura Fig. 3.1, y denotamos por  $\Omega$  la región que ocupa la membrana cuando sobre ella no actúa ninguna fuerza debido al peso. Por otro lado, sea  $\partial\Omega$  el borde de la membrana, y denotemos también por  $z = u(x, y)$  la forma que la membrana toma cuando se deforma bajo la acción de su propio peso.

La idea es obtener una ecuación que nos diga la forma de la membrana que determina a la función  $u(x, y)$  cuando las fuerzas de tensión (que se oponen a la deformación de la membrana) y el peso (que deforma), están en equilibrio. Queda como ejercicio el utilizar la segunda ley de Newton para obtener la ecuación para  $u(x, y)$ .

Nosotros obtendremos la ecuación para  $u$  utilizando el principio de mínima energía, el cual nos dice que “un sistema mecánico se encuentra en su posición de equilibrio, cuando su energía de configuración (o potencial) es mínima”. Debemos pues encontrar una expresión para la energía de la membrana en términos de su forma  $u(x, y)$ .

En nuestros casos la energía de configuración tiene dos partes. Una es la elástica

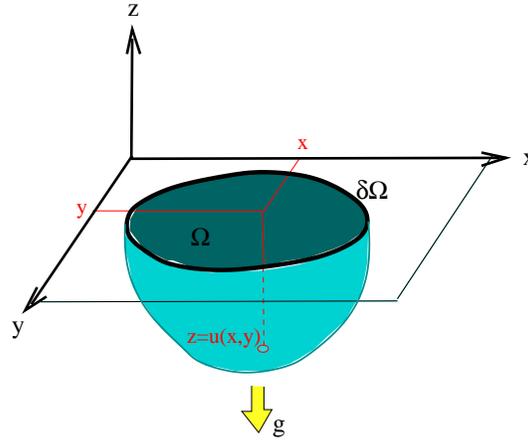


Fig. 3.1

debido al trabajo realizado por la fuerza  $T$ . Es una hipótesis que se debe verificar experimentalmente, que la energía elástica está dada por

$$\text{Energía elástica} / \text{Área de la membrana sin deformar} = T(\text{Área de la membrana deformada} - \text{Área sin deformar}) / \text{Área sin deformar}.$$

El primer problema es calcular el área de la membrana deformada la cual llamaremos  $A_{\text{def}}$  y el área de la membrana sin deformar la llamaremos  $A_{\text{sin}}$ . Si consideramos que la deformación de la membrana es pequeña tal que  $|u(x, y)| \ll 1$  entonces podemos hacer las siguientes aproximaciones. Observemos figura izquierda de Fig. 3.1a, donde hemos puesto el eje  $z$  que apunte hacia abajo, una pequeña sección de la membrana deformada la podemos aproximar por su plano tangente tal como lo vemos en la figura. Queda claro que el pequeño rectángulo en el plano  $x-y$  cuando lo proyectamos hacia la superficie de la membrana deformada no mapea el rectángulo tangente a la superficie en ese punto. Ahora veamos la figura derecha, el área no deformada corresponde al área del rectángulo en el plano  $x-y$ , los lados del rectángulo son  $h$  y  $k$  y uno de los vértices del rectángulo está en la posición  $(x, y, 0)$  y los lados del rectángulos son paralelos a los ejes  $x$  e  $y$ . El rectángulo tangente tiene uno de sus vértices en el punto  $(x, y, u(x, y))$ , para calcular las coordenadas de los vértices adyacentes debemos pensar que  $|u(x, y)|$  es pequeña y por lo tanto si debemos calcular esta función al cambiar una cantidad pequeña en  $x$  o en  $y$  podemos usar su primera aproximación de su serie de Taylor,

$$\begin{aligned} u(x+h, y) &= u(x, y) + u_x(x, y)h + \mathcal{O}(h^2) \\ u(x, y+k) &= u(x, y) + u_y(x, y)k + \mathcal{O}(k^2) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Si ahora nos fijamos en el triángulo pequeño que tiene por coordenadas  $(x, y, u(x, y))$ ,  $(x+h, y, u(x, y))$  y  $(x+h, y, u(x+h, y))$  su hipotenusa es uno de los lados del rectángulo tangente. Si utilizamos las aproximaciones hechas en (3.1), la longitud de esta hipotenusa es  $\sqrt{h^2 + u_x^2 h^2}$ . Lo mismo podemos realizar respecto al rectángulo que tiene los vértices  $(x, y, u(x, y))$ ,  $(x, y+k, u(x, y))$  y  $(x, y+k, u(x, y+k))$ , la longitud de su hipotenusa se puede aproximar por  $\sqrt{k^2 + u_y^2 k^2}$ . Como el área del rectángulo tangente se puede aproximar por el producto de sus lados entonces el área de rectángulo deformado es aproximadamente

$$A_{\text{def}} = \sqrt{h^2 + u_x^2 h^2} \sqrt{k^2 + u_y^2 k^2} = h k \sqrt{(1 + u_x^2)(1 + u_y^2)} = A_{\text{sin}} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \quad (3.2)$$

donde hemos usado el hecho que también las derivadas de  $u$  son pequeñas para obtener esta aproximación.

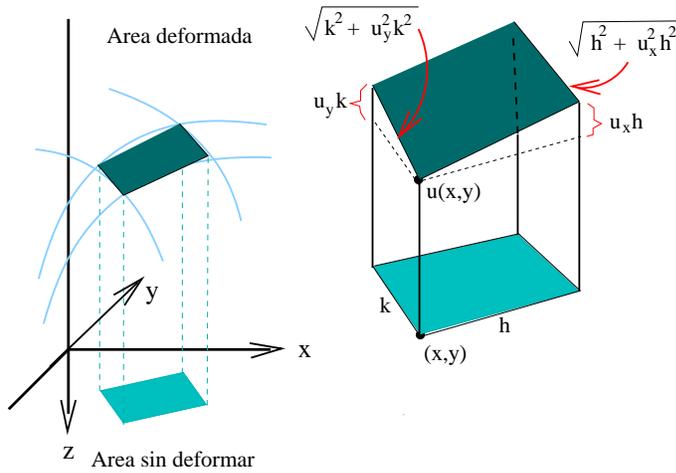


Fig. 3.1b

Ahora ya podemos calcular la energía elástica en términos de la función  $u$ , la cual es

$$\text{Energía elástica} / \text{Área sin deformar} = T \{ (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \}. \quad (3.3)$$

La energía potencial gravitacional por unidad de área debido a la gravedad, es decir al peso de la membrana, es  $\rho g u$  donde  $\rho$  es la masa de la membrana por unidad de área. La energía total se obtiene sumando (3.3) con la parte de la energía gravitacional e integrando sobre el dominio  $\Omega$ . Con lo anterior obtenemos que

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ T \{ (1 + u_x^2 + u_y^2)^{\frac{1}{2}} - 1 \} + \rho g u \right\} dx dy. \quad (3.4)$$

Aplicamos pues el principio de mínima energía a (3.4). Para obtener la  $u$  que minimiza a dicha ecuación, encontraremos primero una condición necesaria para que lo haga, y posteriormente probaremos en algunos casos límites de (3.4) que efectivamente la minimiza.

Para obtener la condición necesaria deseada observamos que si  $u_0$  minimiza a  $E$ , entonces la función

$$E_h(t) = E(u_0 + th)$$

donde  $h$  es una función fija tal que  $h = 0$  en  $\partial\Omega$  y  $t$  un parámetro, alcanza un mínimo como función de  $t$  en  $t = 0$ . Esto es cierto para toda  $h$ , tal que  $h = 0$  en  $\partial\Omega$ . De esta observación tenemos, al igual que en cálculo, que una condición necesaria para que  $u_0$  minimice a (3.4) es que

$$E'_h(0) = 0 \quad \forall h, \quad \text{tal que } h = 0 \text{ en } \partial\Omega. \quad (3.5)$$

Hagamos el cálculo de (3.5), esto significa que debemos encontrar la mínimo de  $E(u_0 + th)$  para toda función  $h$ , esto significa que si derivamos esta expresión respecto a  $t$  y lo igualamos a cero entonces encontraremos su mínimo. Al derivar obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(u_0 + th) = \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left[ T \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + th) \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + th) \right)^2} \right) + \rho g (u_0 + th) \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

Así obtenemos lo siguiente

$$E'(u_0 + th) = \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2} T \frac{2U_x h_x + 2U_y h_y}{\sqrt{1 + U_x^2 + U_y^2}} + \rho g h \right] dx dy \quad (3.7)$$

siendo

$$U_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + t \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$U_y = \frac{\partial u_0}{\partial y} + t \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$h_x = \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$h_y = \frac{\partial h}{\partial y}$$

De esta forma, al tomar el límite cuando  $t$  tiende a cero,

$$\lim_{t \rightarrow 0} E'(u_0 + th) = \int_{\Omega} \left[ T \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x} h_x + \frac{\partial u_0}{\partial y} h_y}{\sqrt{1 + \left( \frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_0}{\partial y} \right)^2}} + \rho g h \right] dx dy \quad (3.8)$$

Para realizar este cálculo va a ser necesario integrar por partes, para ello veamos esta primera integral de (3.8)

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} h_x \, dx \, dy \\
&= \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) h \Big|_{\partial\Omega} \\
&- \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) h \, dx \, dy
\end{aligned} \tag{3.9}$$

donde el término evaluado en  $\partial\Omega$  es cero debido a que hemos impuesto que las funciones  $h$  deben anularse en la frontera.

Realizando la integración por partes en ambas integrales de (3.8) obtenemos la siguiente expresión para el límite de la energía cuando  $t \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned}
& \lim_{t \rightarrow 0} E(u_0 + t h) = \\
& \int_{\Omega} \left[ -T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) \right\} + \rho g \right] h \, dx \, dy \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Esta ecuación debe cumplirse para toda función  $h(x, y)$  que se anule en la frontera de  $\Omega$ , entonces el integrando de (3.10) debe ser cero para esto se cumpla, lo cual nos lleva a la siguiente relación

$$T \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\frac{\partial u_0}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2}} \right) \right\} = \rho g \tag{3.11}$$

La ecuación (3.11) es una ecuación no lineal complicada y por el momento debemos conformarnos con algo menos ambicioso. Un caso de interés es cuando las pendientes de la membrana  $u_x$  y  $u_y$  son pequeñas, esto dependerá del balance entre las fuerzas elásticas, el peso de la membrana, así como su dimensión característica. De aquí que una versión simplificada de (3.11) es (despreciando los términos  $u_x^2$  y  $u_y^2$ ) la ecuación lineal

$$\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= \frac{\rho g}{T}, \text{ en } \Omega, \\
u &= 0, \text{ en } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

donde le hemos quitado el subíndice 0 a  $u$  por comodidad.

Esta expresión (3.12) se llama la ecuación de Poisson. Observamos que (3.12) nos dice que la concavidad de  $u$  es hacia arriba, lo cual está de acuerdo con nuestra intuición y experiencia.

Resolvemos ahora un caso especial de (3.12), el caso cuando  $\Omega$  es un círculo de radio  $a$ . En esta situación es conveniente usar coordenadas polares y escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(r u_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} &= \frac{\rho g}{T}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) &= 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Debido a la simetría del problema podemos buscar soluciones que no dependen de  $\theta$  y obtener así

$$u(r, \theta) = \frac{\rho g}{4T}(r^2 - a^2) \quad (3.13)$$

que es la ecuación de un paraboloide. Es de interés examinar cuándo la solución (3.13) es consistente con la hipótesis de linealización. Dicha consistencia depende de la estimación

$$\text{máx } |u_r| = \frac{\rho g a}{2T} \leq \epsilon.$$

Cuando  $\epsilon \ll 1$  efectivamente la solución es consistente con la hipótesis de una teoría lineal. El significado de  $\epsilon$  es el esperado. Nos dice que para membranas de un radio fijo, la pendiente es pequeña cuando las fuerzas elásticas son grandes comparadas con el peso de la membrana, i.e. es difícil deformar una membrana pequeña.

La ecuación (3.13) nos prueba la existencia de soluciones para (3.12) en un caso particular. La prueba de existencia en casos más generales es objeto de otras partes del curso. Lo que si podemos hacer es probar la unicidad de soluciones de (3.12) cuando  $u \in C^2(\Omega')$  donde  $\Omega'$  es una región que contiene a  $\Omega \cup \partial\Omega$ . La unicidad la podemos verificar suponiendo que existen dos soluciones de (3.12) distintas que llamaremos  $u_1$  y  $u_2$ . Si ahora consideramos la diferencia de ambas soluciones a la cual llamaremos  $u_0$ , entonces esta debe ser una única solución  $u_0 \in C^2(\Omega')$  del problema

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.14)$$

cuya solución es precisamente  $u_0 = 0$ .

Este hecho es consecuencia inmediata del teorema de Green ya que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx dy + \int_{\Omega} u_0 (\nabla^2 u_0) dx dy = \int_{\Omega} \nabla \cdot (u_0 \nabla u_0) dx dy = \int_{\partial\Omega} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial n} dl = 0$$

y como  $u_0$  satisface (3.14) tenemos

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx dy = 0, \quad u_0 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega,$$

de donde  $u_0 = 0$ .

Veremos ahora que la solución de (3.12), si es que la hay en  $C^2(\Omega')$ , efectivamente minimiza a la energía potencial correspondiente que en este caso es un desarrollo a primer orden de (3.4), donde desarrollamos en series de Taylor la raíz cuadrada respecto a  $u_x$  y  $u_y$ , así quedándonos los términos de orden menor debido a que  $|u_x| \ll 1$  y  $|u_y| \ll 1$  tenemos

$$E(u) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2}(u_x^2 + u_y^2) + \rho g u \right\} dx dy. \quad (3.15)$$

Para mostrar que  $E(u_0)$  es mínimo de  $E(u)$  en la clase  $C^2(\Omega')$  de funciones que son cero en  $\partial\Omega$ , basta calcular

$$\begin{aligned} E(u_0 + h) &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{T}{2}(u_{0x}^2 + u_{0y}^2) + \rho g u_0 \right\} dx dy + \\ &\int_{\Omega} \left\{ T u_{0x} h_x + T u_{0y} h_y + \rho g h \right\} dx dy + \int_{\Omega} \frac{T}{2} |\nabla h|^2 dx dy > E(u_0) \end{aligned} \quad (3.16)$$

para toda  $h \in C^2(\Omega')$ , con  $h = 0$  en  $\partial\Omega$  ya que el segundo término de (3.16) es cero, porque es precisamente  $E'_h(0)$  y satisface la ecuación de Poisson así como la condición de frontera. Este resultado ha sido probado bajo condiciones muy restrictivas y poco realistas. Sin embargo, solamente se pretendió ilustrar la situación de una manera simple. Condiciones más precisas y realistas se discutirán en otras partes del curso.

### 3.1.2. Ecuaciones elípticas en mecánica de fluidos y en electrostática

Supongamos un fluido que está moviéndose en tres dimensiones y cuyo movimiento es estacionario. Es decir, en cada punto  $\mathbf{x}$  del espacio, la velocidad  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  es la misma durante todo el tiempo. En este caso una partícula del fluido satisface las ecuaciones

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t))$$

y su trayectoria se llama línea de flujo. Deseamos encontrar ecuaciones que nos permitan encontrar al vector  $\mathbf{v}$  en situaciones de interés. Una de estas situaciones es cuando el fluido no tiene remolino, condición que se expresa por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (3.17)$$

Además de (3.17) necesitamos la ecuación de conservación de la masa. Ésta la obtenemos considerando una superficie tubular  $S_1$  formada por líneas de flujo y acotada en sus extremos por  $S_2$  y  $S_3$ , tal como se ve en la figura Fig. 3.1c. Supongamos además que en el interior del tubo hay una superficie  $S_4$  por la que entra o sale fluido con una velocidad  $\mathbf{v} = \mathbf{w}$  que es una función dada. En una situación estacionaria, la

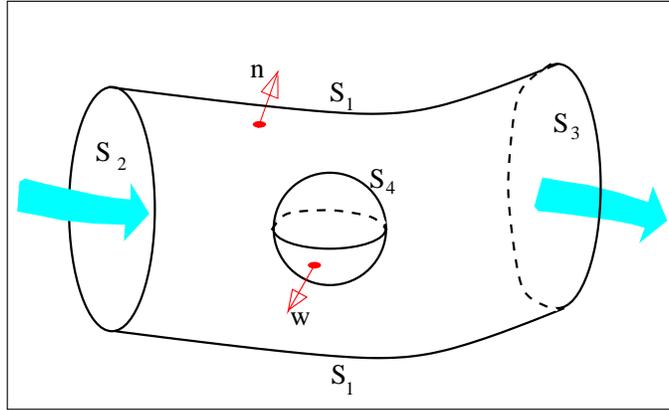


Fig. 3.1c

cantidad de fluido que entra al tubo a través de  $S_2$  y  $S_4$  es la misma que sale por  $S_3$ , ya que por  $S_1$  no entra ni sale fluido debido a que  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  en  $S_1$ , donde  $\mathbf{n}$  es la normal a  $S_1$  y  $\mathbf{w}$  es la normal de  $S_4$ . Haciendo el balance obtenemos, si  $\rho$  es la densidad del fluido, que

$$\begin{aligned} - \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_2 \text{ en 1 segundo,} \\ \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_3 \text{ en 1 segundo,} \\ \int_{S_4} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \text{masa de fluido que entra por } S_4 \text{ en 1 segundo,} \end{aligned}$$

de donde

$$- \int_{S_2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_4} \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{S_3} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_{S_1} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Usando el teorema de la divergencia obtenemos que

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho \mathbf{w})$$

y como  $\mathbf{w}$  es conocida, ya que tiene que ver con la intensidad de la fuente, tendremos que como  $\nabla \times \mathbf{v}$ ; si  $\mathbf{v} = \nabla \phi$ , entonces  $\phi$  satisface

$$\nabla \cdot (\rho \nabla \phi) = f \tag{3.18}$$

donde la función  $f$  es la intensidad de la fuente (o sumidero) que es una función conocida. La ecuación (3.18) debe suplementarse con condiciones de frontera. Supongamos

que  $\phi$  es el potencial de  $\mathbf{v}$  en un fluido no viscoso. En este caso se sabe que sobre una superficie rígida las líneas de flujo son paralelas a ella, de aquí que sobre paredes rígidas la condición apropiada es:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \nabla\phi \cdot \mathbf{n} = \phi_n = 0$ .

En las extremidades de un tubo debe especificarse el flujo, es decir especificar  $\phi_n$ . Por ejemplo, el flujo estacionario en un tubo  $\Omega$  queda completamente especificado por la solución de la ecuación

$$\begin{aligned} (\rho\phi_x)_x + (\rho\phi_y)_y + (\rho\phi_z)_z &= 0 \text{ en } \Omega, \\ \phi_n &= 0, \text{ pared rígida,} \\ \phi_n &= f_1, \text{ extremo inicial del tubo,} \\ \phi_n &= f_2, \text{ extremo final del tubo.} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En el caso de una densidad constante, la (3.1.2) es la ecuación de la membrana con  $\rho = 0$ , excepto que aquí las condiciones de frontera son distintas.

Otra situación de mucho interés donde aparecen las ecuaciones elípticas, es en la aproximación a las ecuaciones de Maxwell. En electrostática cuando  $\mathbf{E}_t = \mathbf{B}_t = \mathbf{0}$  donde los campos eléctrico y magnético están en  $\mathbb{R}^3$ , es decir, los campos no dependen del tiempo; tenemos que las ecuaciones de Maxwell se reducen a

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J}, \end{aligned}$$

suplementadas por las condiciones de frontera apropiadas. Obsérvese que en el caso estático las ecuaciones para  $\mathbf{E}$  y para  $\mathbf{B}$  son independientes.

Supongamos que queremos determinar el campo eléctrico en una región como la que se ve en la Fig. 3.2. donde la superficie  $S$  es conductora. En ese caso  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Las ecuaciones que determinan a  $\mathbf{E}$  son

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} &= 0 \text{ en } S. \end{aligned}$$

Como  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$ , tenemos que  $\mathbf{E} = \nabla\phi$ , y  $\phi$  satisface el problema de Neumann

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ dentro de } S, \\ \phi_n &= 0, \text{ en } S, \end{aligned}$$

donde  $\phi_n$  es la derivada normal de  $\phi$  en la superficie  $S$ . La ecuación (3.20) es una ecuación elíptica igual a la de la membrana que discutimos al principio de esta sección.

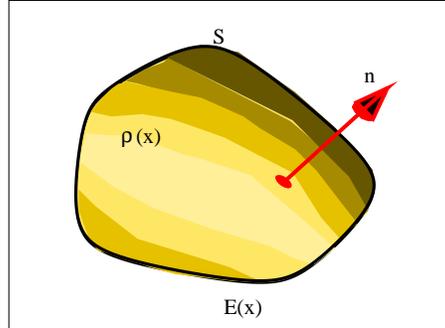


Fig. 3.2

## 3.2. Soluciones a algunos problemas elípticos por separación de variables

En esta sección vamos a introducir el método de separación de variables el cual es un procedimiento muy utilizado en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales lineales en general. Para ello comenzaremos con el estudio de problemas que tienen condiciones de frontera de Dirichlet donde construiremos la fórmula de Poisson. También examinaremos algunos problemas con condiciones de frontera tipo Neumann y finalizaremos definiendo el principio del máximo para la ecuación de Laplace.

### 3.2.1. Problemas de Dirichlet

Como primer ejemplo consideramos el problema de Dirichlet para un disco de radio  $a$  definido en el plano, por la simetría del problema utilizaremos coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, & 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) &= f(\theta); \quad f(0) = f(2\pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.20)$$

La idea es reducir (3.20) a un problema de ecuaciones diferenciales ordinarias. Para lograr esto observamos que  $u(r, \theta)$  es periódica como función de  $\theta$ , por este motivo puede desarrollarse en serie de Fourier de la forma

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(r) \operatorname{sen} n\theta + b_n(r) \operatorname{cos} n\theta\}, \quad (3.21)$$

donde

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) d\xi, \quad a_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) \operatorname{sen} n\xi d\xi,$$

$$b_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(r, \xi) \cos n\xi \, d\xi. \quad (3.22)$$

En (3.21) los coeficientes son funciones de una sola variable que esperamos determinar a partir de la ecuación parcial y la condición de frontera. Sustituyendo (3.21) en (3.20) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2r}(ra_{0r})_r \right. \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{r}(ra_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}a_n \right) \operatorname{sen}(n\xi) \\ & \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{r}(rb_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}b_n \right) \cos(n\xi) \right] d\xi = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es claro que el integrando de (3.23) debe ser cero, esto no lleva a que el integrando es la expresión de la serie de Fourier de la función nula, la cual necesariamente tiene sus coeficientes de Fourier igual a cero. Esto nos lleva a que cada término que representan estos coeficientes debe igualarse a cero por la cual obtenemos el siguiente sistema infinito de ecuaciones diferenciales ordinarias que tienen la propiedad de estar desacoplados

$$\frac{1}{r}(ra_{0r})_r = 0, \quad \frac{1}{r}(ra_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}a_n = 0, \quad \frac{1}{r}(rb_{nr})_r - \frac{n^2}{r^2}b_n = 0. \quad (3.24)$$

La condición de frontera debe de ser necesariamente una función periódica en  $\theta$  por lo cual la podemos también expresar en su serie de Fourier

$$f(\theta) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_n(r) \operatorname{sen} n\theta + g_n(r) \cos n\theta \right\}$$

como  $u(a, \theta) = f(\theta)$  en la frontera esto nos permite obtener las condiciones de frontera para (3.24) en la forma

$$a_0(a) = g_0, \quad a_n(a) = f_n, \quad b_n(a) = g_n. \quad (3.25)$$

Una condición adicional que imponemos sobre la función  $u$  es que sea acotada. La ecuación para  $a_0$  tiene por soluciones  $a_0 = cte.$  y  $a_0 = \ln r$ . Para satisfacer las condiciones de frontera y de regularidad, tenemos que  $a_0 = g_0$ . Las ecuaciones para  $a_n$  y  $b_n$  son ecuaciones de Euler de la forma

$$r^2 a_n'' + r a_n' - n^2 a_n = 0,$$

con soluciones  $r^n$ ,  $r^{-n}$ . Como deseamos soluciones regulares para  $a_n$  y  $b_n$  tenemos que

$$a_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n f_n; \quad b_n = \left(\frac{r}{a}\right)^n g_n. \quad (3.26)$$

Utilizando (3.26) tenemos una solución formal

$$u(r, \theta) = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \{f_n \operatorname{sen} n\theta + g_n \operatorname{cos} n\theta\}. \quad (3.27)$$

Para verificar que (3.27) es efectivamente una solución de (3.20) hay que precisar lo que se entiende por una solución de (3.20).

Por una solución de (3.20) entenderemos una función  $u(r, \theta)$  dos veces diferenciable para  $r < a$ , continua para  $r \leq a$  tal que

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & r < a, & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u(a, \theta) &= f(\theta), & & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned}$$

A este tipo de soluciones las designamos como soluciones clásicas.

Hay otros conceptos de solución; por ejemplo podemos decir que  $u$  es solución de la (3.20), si  $u$  es dos veces derivable para  $r < a$  y  $\lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = f(\theta)$  sin ser  $u$  necesariamente continua para  $r = a$ .

Claramente el tipo de solución buscada depende mucho del dato  $f(\theta)$ . Nosotros probaremos aquí que cuando el dato  $f(\theta)$  es dos veces continuamente derivable y periódico, él y sus derivadas, entonces  $u(r, \theta)$  provee una solución clásica de la (3.20) que es continua hasta la frontera. En (3.27) vemos que la diferenciabilidad de la serie depende de la rapidez con la cual los coeficientes  $f_n$  y  $g_n$  decaen a cero. Nosotros probaremos que cuando  $f \in \mathcal{C}^2[0, 2\pi]$  y es periódica, la serie converge de tal forma que permite su derivación término a término para  $r < a$  y define una función continua para  $r \leq a$ .

Para probar la convergencia de (3.27) necesitamos estimar los coeficientes  $f_n$  y  $g_n$ . Tomamos por ejemplo

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi = -\frac{1}{\pi} \frac{\cos n\xi}{n} f(\xi) \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\xi f'(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \cos n\xi f'(\xi) d\xi = -\frac{1}{n^2\pi^2} \int_0^{2\pi} f''(\xi) \sin n\xi d\xi \end{aligned}$$

donde hemos integrado dos veces por partes y hemos utilizado la periodicidad de la función  $f(\theta)$ . Si ahora utilizamos el hecho que la función  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2$  entonces su segunda derivada deben ser acotada,  $\max |f''| < K$ , así

$$|f_n| \leq \frac{\max |f''|}{n^2\pi} = \frac{K}{n^2\pi}.$$

Análogamente

$$g_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \operatorname{cos} n\xi d\xi, \quad |g_n| \leq \frac{K}{n^2\pi}.$$

Para probar que (3.27) es dos veces derivable para  $r < a$  recordamos que una condición suficiente para que la derivada de una serie uniformemente convergente exista, es que

la serie obtenida al derivar término a término sea una serie uniformemente convergente de funciones continuas.

Es claro que (3.27) es uniformemente convergente para  $r \leq a$ . Esto se debe a que está dominada por una serie convergente, y para ver que es derivable para  $r < a$  examinamos por ejemplo la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \{f_n \operatorname{sen} n\theta + g_n \operatorname{cos} n\theta\} \quad (3.28)$$

obtenida al derivar dos veces (3.27) término a término con respecto a  $r$ . La serie (3.28) es uniformemente convergente para  $r < a$  ya que

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{a^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \{f_n \operatorname{sen} n\theta + g_n \operatorname{cos} n\theta\} \right| &\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2K}{\pi a^2} \frac{n(n-1)}{n^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} \\ &< \frac{2K}{\pi a^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^{n-2} < \infty \quad , \quad \text{si} \quad r < a. \end{aligned}$$

donde la serie geométrica que se obtiene al final es convergente para  $r < a$ . Esta desigualdad prueba que  $u$  es dos veces derivable respecto a  $r$  para  $r < a$ . Queda como ejercicio el probar la derivabilidad respecto a  $\theta$ .

La misma construcción de la solución, muestra que  $u$  satisface la ecuación. Esto completa la prueba de que (3.27) provee una solución clásica de (3.20) cuando  $f \in C^2[0, 2\pi]$  y  $f$  es periódica.

La prueba de unicidad dada, utilizando el teorema de la divergencia, no es aplicable en este caso ya que no sabemos que  $u \in C^2(\Omega')$ . Una prueba de unicidad apropiada la daremos más adelante. Sin embargo se deja como ejercicio el probar que si  $f \in C^\infty[0, 2\pi]$  y todas sus derivadas son periódicas, entonces  $u \in C^\infty$  para  $r \leq a$  y la solución es única en ese caso.

### 3.2.2. Método de separación de variables

La solución (3.27) de la ecuación (3.20) fue obtenida utilizando el hecho muy particular de que el dato es una función periódica y por ese motivo desarrollable en serie de Fourier. Sin embargo un examen más detallado de (3.27) nos muestra ciertos hechos que nos permitirán resolver otros problemas. Primero que nada (3.27) es una suma de productos de la forma

$$\sum C_n R_n(r) \Theta_n(\theta) \quad (3.29)$$

donde cada producto satisface la ecuación y recibe el nombre de solución separable. Además la familia  $\{\Theta_n\}$  tiene la propiedad de que toda función de una clase apropiada

puede escribirse en la forma

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} f(\xi) \Theta_n(\xi) d\xi \right) \Theta_n(\theta).$$

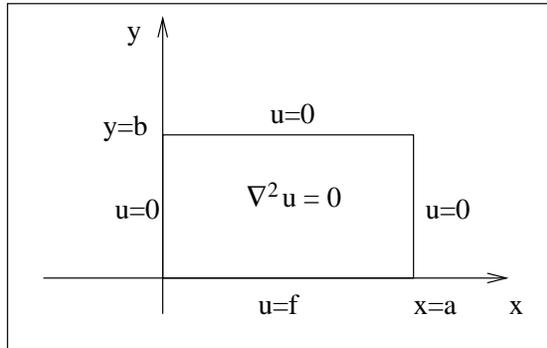
De estas observaciones deducimos que cuando el dato del problema puede expresarse con una fórmula análoga a la de las series de Fourier, en términos de funciones que son factores de una solución separable, el problema se puede resolver al menos formalmente de la misma manera que el problema anterior.

Una técnica para resolver ecuaciones parciales es la de buscar todas las posibles soluciones separables, y seleccionar entre ellas una subclase que pueda expresar el dato del problema. Una vez encontradas esas soluciones una suma análoga a la (3.29) nos dará una solución formal del problema. La técnica descrita se llama el **método de separación de variables**.

Como un ejemplo de aplicación consideremos el problema mostrado en la Fig. 3.3:

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & \text{en } \{(x, y) \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ u(0, y) &= u(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = f(x) &= u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Buscamos soluciones separables del problema de la forma  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , y la



esperanza es que resulte una familia de funciones  $\{X_n(x)\}$  que nos permitan desarrollar la función  $f(x)$ . Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$X''Y + Y''X = 0, \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0,$$

de donde

$$\frac{X''}{X} = \mu, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu, \quad (3.31)$$

donde  $\mu$  es una constante real. Para que  $u$  resuelva el problema, al examinar las condiciones de frontera de la ecuación (3.29) observamos que las funciones  $X$  e  $Y$  deben satisfacer  $X(0) = X(a) = Y(b) = 0$ . Deben pues resolverse (3.31) con las condiciones de frontera apropiadas. Supongamos que  $\mu = \lambda^2 > 0$ . Entonces

$$\begin{aligned} X'' - \lambda^2 X &= 0, & X(0) &= X(a) = 0, \\ X(x) &= \sinh(\lambda x), & \text{pero } \sinh(\lambda a) &\neq 0, \text{ pues } a \neq 0 \end{aligned}$$

por tanto  $\lambda^2 > 0$  no es valor propio. Y si suponemos que  $\mu = -\lambda^2 < 0$ , entonces

$$X_n(x) = \sin(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \mu_n = -\frac{n^2\pi^2}{a^2}.$$

Las correspondientes funciones  $Y_n$  satisfacen

$$Y_n'' + \mu_n Y_n = 0, \quad Y_n(b) = 0,$$

de donde se sigue que

$$Y_n = \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

y por ende que las soluciones separables son:

$$u_n(x, y) = \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

En (3.20) el teorema de Fourier garantizaba la posibilidad de desarrollar el dato del problema en términos de las funciones  $\Theta_n$ . En este caso para poder utilizar el método necesitamos un desarrollo de la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (3.32)$$

donde las  $C_n$  sean coeficientes por determinarse. La existencia de un desarrollo de la forma (3.32) no es obvia de ninguna manera. Hay cierta esperanza de que sea válida ya que las funciones  $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$  son oscilantes. Supongamos que (3.32) es válida y tratemos de determinar las  $C_n$ . Como en el caso de series de Fourier multiplicando por  $\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$  e integrando obtenemos:

$$\int_0^a f(\xi) \sin\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi = C_n \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi = \frac{a}{2} C_n. \quad (3.33)$$

Utilizando (3.33) obtenemos que una solución formal del problema es

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\left[\frac{n\pi}{a}(y-b)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (3.34)$$

donde

$$A_n = -\frac{2}{a \operatorname{senh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right)} \int_0^a f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}\xi\right) d\xi$$

siempre que (3.32) sea válida.

El estudio de la validez de desarrollos como el dado en (3.32), asociados con soluciones separables de ecuaciones parciales, es objeto de la Teoría de Sturm-Liouville que empezó a desarrollarse a mediados del siglo pasado. Nosotros no intentaremos dar una exposición ya que su estudio comprende varios volúmenes. Una breve discusión puede encontrarse en el libro de Weinberger [15]. Nos limitaremos en estas notas a unos breves comentarios y a mostrar analogías con el álgebra lineal, las cuales facilitarán el aceptar sin demostración, la validez de desarrollos de la forma (3.32). Para hacer la analogía con el álgebra lineal observamos que las funciones

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right)$$

satisfacen

$$\frac{d^2}{dx^2}X_n(x) = -\lambda_n^2 X_n(x), \quad X_n(0) = X_n(a) = 0. \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) indica que las funciones  $X_n$  son eigenvectores de la transformación lineal  $A : D \rightarrow \mathcal{C}[0, a]$  donde  $D = \{f \in \mathcal{C}^2[0, a] \mid f(0) = f(a) = 0\}$ , definida por

$$Af(x) = f''(x).$$

El conjunto  $D$  es un subespacio vectorial de las funciones continuas,  $\mathcal{C}[0, a]$ , y en él se puede definir un producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^a f g \, dx. \quad (3.36)$$

De acuerdo al producto escalar dado en la (3.36), el operador  $A$  resulta ser simétrico ya que para  $f, g \in D$  se satisface

$$\langle Af, g \rangle = \int_0^a f'' g \, dx = \int_0^a f g'' \, dx = \langle f, Ag \rangle.$$

El mismo argumento del álgebra lineal muestra que los eigenvectores de  $A$  correspondientes a eigenvalores distintos son ortogonales, es decir

$$\int_0^a X_n(x)X_m(x)dx = 0, \quad m \neq n.$$

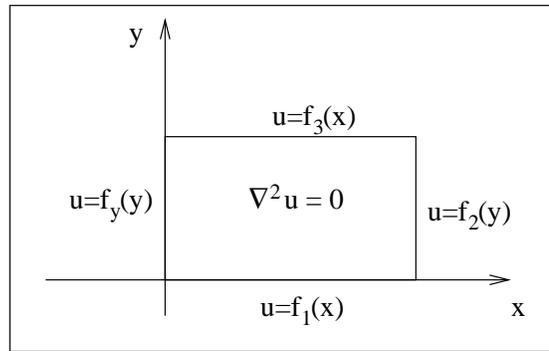
Además recordamos el resultado de álgebra lineal en el que se dice que los eigenvectores de una transformación simétrica forman una base del espacio. En álgebra lineal, debido a que el espacio es de dimensión finita, sólo tenemos un número finito de eigenvectores; en nuestro caso tenemos un número infinito, ya que  $D$  es de dimensión

infinita. Podemos imaginar una extensión no obvia pero si natural, del álgebra lineal al pensar que los eigenvectores  $X_n$  forman una base del espacio  $D$  en el sentido de que toda  $f \in D$  puede desarrollarse, como en álgebra lineal, en la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n \quad (3.37)$$

donde la convergencia de la serie debe entenderse en una forma apropiada. Vemos que (3.32) justifica por analogía el desarrollo mostrado en (3.37). El estudio de la convergencia de series de la forma (3.37) es objeto de la teoría de Sturm-Liouville. Una vez establecida la rapidez de crecimiento de los coeficientes  $C_n$  se procede, como en el caso de series de Fourier, a verificar la validez de las soluciones formales obtenidas por el método de separación de variables. Una exposición más detallada de estos resultados está en el libro de Weinberger [15].

Queda como ejercicio el resolver formalmente, y tratar de comprobar la validez de la solución del problema indicado en la Fig. 3.4.



### 3.2.3. La fórmula de Poisson

Para empezar esta subsección definiremos al conjunto de funciones armónicas a aquellas que su laplaciano es nulo,  $\nabla^2 f(x) = 0$ , es decir, cumplen la ecuación de Laplace. Si se recuerda que en la variable compleja las funciones armónicas son parte real de funciones analíticas, es de esperarse para ellas una representación tipo Cauchy en términos de una integral que involucre sus valores en la frontera. Calcularemos ahora esta expresión usando (3.27), que al escribirla usando la definición de sus coeficientes es

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos[n(\theta - \xi)] f(\xi) d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos[n(\theta - \xi)] \right\} f(\xi) d\xi.$$

Pero considerando la identidad  $\cos(x) = \operatorname{Re} e^{ix}$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos[n(\theta - \xi)] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} e^{i(\theta - \xi)} \right)^n \right\} \quad (3.38)$$

observamos que la suma es precisamente una suma geométrica (menos uno porque no comienza la suma en cero) y como  $|r e^{i(\theta - \xi)} / a| < 1$  porque  $r < a$ , entonces la suma la podemos calcular en forma cerrada

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{r}{a} \right)^n \cos[n(\theta - \xi)] &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta - \xi)}} - 1 \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\theta - \xi)}} \left[ \frac{a - r e^{-i(\theta - \xi)}}{a - r e^{-i(\theta - \xi)}} \right] \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} + \frac{a^2 - a r e^{-i(\theta - \xi)}}{a^2 + r^2 - a r (e^{i(\theta - \xi)} + e^{-i(\theta - \xi)})} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( -\frac{1}{2} + \frac{a^2 - a r \cos(\theta - \xi) + i a r \operatorname{sen}(\theta - \xi)}{a^2 + r^2 - 2 a r \cos(\theta - \xi)} \right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{a^2 - a r \cos(\theta - \xi)}{a^2 + r^2 - 2 a r \cos(\theta - \xi)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2 a r \cos(\theta - \xi) + r^2} \end{aligned} \quad (3.39)$$

De donde

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r^2) f(\xi) d\xi}{a^2 - 2 a r \cos(\theta - \xi) + r^2}. \quad (3.40)$$

La ecuación (3.40) es la fórmula de Poisson. Es importante observar que el lado derecho de (3.40) está definido para  $r < a$  siempre que

$$\int_0^{2\pi} |f(\xi)| d\xi < \infty.$$

Además la fórmula (3.40) define una función armónica ( $\nabla^2 u = 0$ ) para  $r < a$ , aún si  $f$  no tiene serie de Fourier. Es posible probar que cuando  $f$  es solamente continua, (3.40) provee una solución clásica al problema de Dirichlet en el sentido que

$$\lim_{r \rightarrow a} u(r, \theta) = f(\theta).$$

### 3.2.4. Problema de Neumann

Consideremos ahora el caso donde en la frontera no se preescriben los valores de la función, sino los valores de su derivada normal. Empezamos considerando el problema para un círculo.

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= \frac{1}{r}(ru_r)_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, \quad 0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ u_r(a, \theta) &= f(\theta), \quad f(0) = f(2\pi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Procedemos en forma similar como lo hicimos en el problema de Dirichlet desarrollando  $u$  como

$$u(r, \theta) = a_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n(r) \sin n\theta + b_n(r) \cos n\theta \right\}$$

donde las  $a_n$ ,  $b_n$  son soluciones acotadas en  $r = 0$  del sistema. Al substituir (3.2.4) en (3.41) obtenemos una expresión similar a la obtenida en (3.23) y bajo los mismos argumentos que usamos para el caso de Dirichlet obtenemos el siguiente conjunto infinito de ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(ra'_n)_r - \frac{n^2}{r^2}a_n &= 0, \quad a'_n(a) = f_n, \quad n \geq 1, \\ \frac{1}{r}(rb'_n)_r - \frac{n^2}{r^2}b_n &= 0, \quad b'_n(a) = g_n, \quad n \geq 1, \\ \frac{1}{r}(ra'_0)_r &= 0, \quad a'_0(a) = g_0. \end{aligned}$$

Para  $n \geq 1$  la solución del sistema es:

$$a_n(r) = f_n \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n, \quad b_n(r) = g_n \frac{a}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n.$$

Sin embargo, para  $n = 0$  encontramos  $a_0(r) = cte.$  porque debe ser acotada en  $r = 0$ , de donde la ecuación

$$a'_0(a) = 0 = g_0$$

se satisface sólo si

$$g_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) d\xi = 0. \quad (3.42)$$

Es decir el problema de Neumann no tiene solución formal para un dato arbitrario, sino que el dato debe satisfacer la condición de compatibilidad de la (3.42). Si el dato

satisface dicha ecuación, entonces una solución formal está dada por

$$u(r, \theta) = a \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_n}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \sin(n\theta) + \frac{g_n}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos(n\theta) \right\} \quad (3.43)$$

donde la convergencia de la serie depende de qué tan rápido decaen los coeficientes  $f_n$ ,  $g_n$ . La solución dada en la (3.43) no es única ya que las constantes también son soluciones del problema. Queda como ejercicio el verificar que si  $f \in \mathcal{C}^2[0, 2\pi]$  y es periódica, entonces  $u \in \mathcal{C}^2$  para  $r < a$  y  $u \in \mathcal{C}^1$  para  $r \leq a$ .

De la misma forma que en el problema de Dirichlet, podemos sumar la serie (3.43) de la siguiente manera. Si los coeficientes  $f_n$  y  $g_n$  están definidos de la forma siguiente

$$f_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi \quad g_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos(n\xi) d\xi \quad (3.44)$$

substituimos dichos coeficientes en (3.43) del cual obtenemos

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\xi) [\cos(n\theta) \cos(n\xi) + \sin(n\theta) \sin(n\xi)] d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} f(\xi) \cos[n(\theta - \xi)] d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a}\right)^n \operatorname{Re}\{e^{i(n\theta - n\xi)}\} \right] d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \operatorname{Re}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}}\right)^n \right\} d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \operatorname{Re}\left\{ \ln\left(1 - \frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}}\right) \right\} d\xi \\ &= \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \ln\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}}\right| d\xi \end{aligned} \quad (3.45)$$

donde hemos utilizado las siguientes identidades,  $\ln(1 - x) = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$  y que  $\operatorname{Re} \ln(x) = |\ln(x)|$ . La expresión

$$u(r, \theta) = \frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\xi) \ln\left|1 - \frac{re^{i\theta}}{ae^{i\xi}}\right| d\xi \quad (3.46)$$

también la denotamos como la fórmula de Poisson para el problema de Neumann. Es interesante notar que (3.46) define una función continua hasta  $r = a$  para datos  $f(\theta)$  continuos.

### 3.2.5. El principio del máximo para la ecuación de Laplace

Supongamos una solución clásica de  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  del problema

$$\nabla^2 u = F, \quad F > 0, \quad F \in \mathcal{C}(\Omega),$$

$$u = f \text{ en } \partial\Omega.$$

Físicamente es claro que la forma  $u$  es el de la membrana que es sujeta a la fuerza  $F$ , sólo puede ser cóncava hacia arriba y por lo tanto  $u$  alcanza su máximo en la frontera. Nos proponemos probar formalmente este hecho. Como  $u$  es continua entonces alcanza su máximo en  $\bar{\Omega}$ . Supongamos que el máximo lo alcanza en un punto que no está en la frontera tal que  $x_0 \in \Omega$ . En el punto  $x_0$  tenemos por cálculo que si dicho punto es un máximo entonces  $F = \nabla^2 u \leq 0$  lo cual es una contradicción pues  $F > 0$  en  $\Omega$ . Por lo tanto podemos concluir que  $u$  alcanza su máximo en la frontera. Consideremos ahora el problema

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = f \text{ en } \partial\Omega,$$

probaremos que si  $u$  es una solución clásica entonces  $u$  satisface

$$u \leq \max_{x \in \partial\Omega} f, \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Para probar esto tomamos

$$v = u + \epsilon(x^2 + y^2)$$

entonces

$$\nabla^2 v = 4\epsilon$$

y por el resultado anterior

$$v \leq \max_{x \in \partial\Omega} u + \epsilon R^2$$

donde  $R$  es el radio de un círculo que contiene a  $\bar{\Omega}$ . Además

$$u \leq v \leq \max_{x \in \partial\Omega} u + \epsilon R^2. \quad (3.47)$$

Como (3.47) es válida para toda  $\epsilon > 0$  tendremos el resultado deseado.

El principio del máximo puede utilizarse para probar la unicidad de una solución clásica  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$  de la ecuación de Laplace. En efecto, supongamos una solución clásica del problema de Dirichlet

$$\nabla^2 u = 0 \text{ en } \Omega, \quad u = 0 \text{ en } \partial\Omega.$$

Por el principio del máximo tenemos  $u \leq 0$  en  $\Omega$ . Por otra parte  $-u$  es también solución de este problema de Laplace y por el principio del máximo entonces  $-u \leq 0$ , de donde podemos concluir que  $u = 0$ . Esto prueba que la única solución clásica de la (3.20), cuando  $f \in \mathcal{C}^2[0, 2\pi]$  y es periódica, está dada por la serie (3.27).

### 3.2.6. El problema del tambor

En muchos problemas elípicos vamos a encontrarnos con situaciones de oscilaciones estacionarias, este tipo de problema no es estrictamente un problema elíptico pero utilizando la separación de variables lo podemos descomponer un problema de un oscilador más un problema elíptico. El problema del tambor es un buen ejemplo de como hacer esta separación de la parte oscilante y la elíptica.

Cuando nos preguntan, ¿Cuál es el instrumento de la orquesta que solo produce un único sonido? Inmediatamente se nos viene a la cabeza el tambor o quizás el triángulo. Sin embargo nos parecería inverosímil que uno de los instrumentos en la orquesta que puede producir mas sonidos que no sean solamente armónicos es el tambor, así que veamos como es posible que de este instrumento tan simple podamos generar un mar de sonidos. Para plantear el problema hagamos lo siguiente, consideremos el

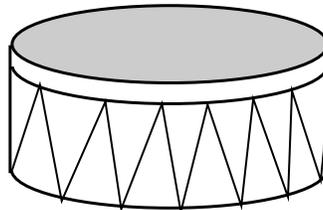


Fig. 3.4a

problema de la membrana cuyas ecuaciones estan dadas en (3.12). Ahora pensemos en una membrana donde no actua la fuerza de gravedad y donde esta membrana puede vibrar debido a que está tensa a la orilla del tambor. Por la segunda ley de Newton podemos pensar que la fuerza que actua es solamente la fuerza elástica, tal como la encontramos en el problema de la membrana, de esta forma las ecuaciones de movimiento de la membrana son las siguientes:

$$\rho \frac{d^2 u}{dt^2} = T \nabla^2 u \quad (3.48)$$

donde estamos dando la densidad de masa por aceleración es igual a la fuerza restitutiva elástica por unidad de área.

Considerando la simetría axial del tambor nos conviene utilizar coordenadas polares

de tal forma que la ecuación (3.48) la escribimos ahora de esta forma

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= c^2 \nabla^2 u & 0 \leq r \leq 1 \\ & & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ & & 0 < t \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} u &= 0 & r = 1 \\ & & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ & & 0 < t \end{aligned}$$

donde  $c^2 = T/\rho$ . Además vamos a incluir las condiciones iniciales las cuales son

$$u = f(r, \theta) \quad u_r = g(r, \theta) \quad \text{en } t = 0 \quad (3.50)$$

Debemos observar que la primera condición inicial corresponde a una deformación de la membrana pero la segunda la podemos entender como un cambio en el momento, es decir, como un golpe producido por las baquetas del tambor.

Con este conjunto de ecuaciones podemos intentar encontrar su solución por medio del método de separación de variables. La primera separación corresponde a romper el problema en una parte espacial y otra temporal, así proponemos que  $u(r, \theta, t) = U(r, \theta) T(t)$ . Al substituir esta  $u$  en (3.49) podemos hacer la separación de la siguiente forma:

$$\frac{\frac{d^2 T(t)}{dt^2}}{c^2 T(t)} = \frac{\nabla^2 U(r, \theta)}{U(r, \theta)} = -\lambda^2 \quad (3.51)$$

de lo cual se obtiene estas dos ecuaciones desacopladas

$$\nabla^2 U(r, \theta) + \lambda^2 U(r, \theta) = 0 \quad (3.52)$$

que es la ecuación de Helmholtz. La segunda ecuación corresponde a un oscilador armónico

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + c^2 \lambda^2 T(t) = 0 \quad (3.53)$$

Enfoquemonos ahora en la ecuación de Helmholtz que representa la deformación espacial de la membrana. La ecuación la podemos escribir de esta forma

$$\begin{aligned} \nabla^2 U(r, \theta) + \lambda^2 U(r, \theta) &= 0 & 0 \leq r \leq 1 & \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ U(1, \theta) &= 0 & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para seguir resolviendo la ecuación de Helmholtz proponemos otra vez una separación de variable donde  $U(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta)$ . Dado que estamos trabajando en coordenadas polares, (3.54) queda escrito así

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} [R(r) \Theta(\theta)] \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [R(r) \Theta(\theta)] = -\lambda^2 R(r) \Theta(\theta) \quad (3.55)$$

Separando las variable obtenemos

$$\frac{\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} R(r) \right) + \lambda^2 R(r)}{R/r^2} = -\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\mu^2 \quad (3.56)$$

Donde la  $\mu^2$  es la constante de acoplamiento y le hemos puesto el signo negativo para que la ecuación correspondiente a  $\Theta$  sea un oscilador armónico

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \Theta(\theta) = -\mu^2 \Theta(\theta) \quad (3.57)$$

cuya solución debe ser  $2\pi$  periódica y por lo tanto es de la forma

$$\Theta(\theta) = A_n \operatorname{sen}(n\theta) + B_n \operatorname{cos}(n\theta) \quad (3.58)$$

donde  $\mu = n$  y  $n \in \mathbb{N}$ .

Ahora estudiaremos la solución de la parte radial, al hacer la separación de variables, sobre la parte radial nos queda la siguiente ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} R(r) \right) + \lambda^2 R(r) = n^2 \frac{R(r)}{r^2} \quad (3.59)$$

la cual ordenando los términos obtenemos la bien conocida ecuación de Bessel

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (\lambda^2 r^2 - n^2) R(r) = 0 \quad (3.60)$$

Esta ecuación puede ser resuelta por el método de Frobenius de donde obtenemos dos soluciones, una acotada  $J_n(\lambda r)$  y otra no acotada  $Y_n(\lambda r)$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Las soluciones no acotadas son divergentes en cero, en cambio las soluciones acotadas parten de cero excepto  $J_0$  tal como lo vemos en la figura Fig. 3.5b. Es importante notar que todas las funciones  $J_n$  son oscilantes, de tal forma que tienen un número infinito de raíces. Por lo tanto la solución radial la podemos expresar de la siguiente manera

$$R(r) = A_n J_n(\lambda r) \quad (3.61)$$

Por la condición de frontera sabemos que  $R(1) = 0$ , lo que representa que la membrana está sujeta al arillo del tambor y no se mueve. De esta forma, debemos buscar que los ceros de las funciones de Bessel coincidan con el valor  $r = 1$ . Los ceros de estas funciones están tabulados en una infinidad de libros, a continuación mostramos un resumen de esta tabulación de ceros:

$m \setminus n$	0	1	2	...
1	2.4	3.83	5.13	...
2	5.2	7.02	8.42	...
3	8.61	10.17	11.62	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...
.	.	.	.	...

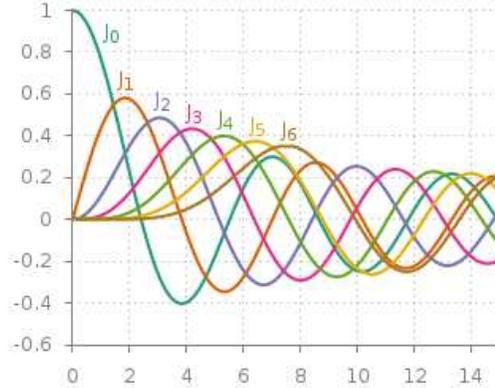


Fig. 3.5b

El índice  $n$  representa el orden de la función de Bessel,  $J_n$  y el índice  $m$  representa el orden del cero de la ésta función de Bessel, donde  $m = 1$  es la primera raíz de  $J_n$  y así sucesivamente. De esta forma podemos denotar como  $k_{nm}$  el  $m$ -ésimo cero de la función de Bessel  $J_n$ . Por lo tanto, es claro que el parámetro  $\lambda$  debe ser precisamente uno de estos cero,  $\lambda = k_{nm}$  de tal forma que cuando  $r = 1$  el argumento de la función de Bessel siempre será una raíz de esta.

Al juntar la parte radial con la angular, tenemos la siguiente función

$$U_{nm}(r, \theta) = J_n(k_{nm} r) [A_n \sin(n\theta) + B_n \cos(n\theta)] \quad (3.62)$$

La función  $U_{nm}(r, \theta)$  tiene el valor cero cuando el argumento de la función Bessel pasa por alguno de sus ceros o cuando las funciones trigonométricas se anulan. Esto hace que la función  $U$  adquiera ciertos patrones los cuales los podemos observar en la figura Fig. 3.5c. En dicha figura la parte oscura representa cuando la función  $U$  es negativa y clara cuando es positiva. Podemos decir que cuando es negativa la membrana esta hundida y cuando es clara esta saliente. Debido a que los índices de la función  $U_{nm}$  no están acotados pues  $n = 0, 1, 2, \dots$  y  $m = 1, 2, 3, \dots$ , queda claro que existen un número infinito de patrones que puede adquirir esta función.

Ahora consideremos la parte temporal de nuestra solución, habiamos dicho que el parámetro  $\lambda$  tomaba los valores de los ceros de las funciones de Bessel, es decir  $\lambda = k_{nm}$ . Por otro lado este parámetro  $\lambda$  representa la frecuencia de oscilación de la membrana tal como lo vemos en la ecuación (3.53). ¿Qué consecuencia tiene esto? Regresemos a esta primera pregunta que haciamos al principio de la sección: ¿Cuántos sonidos tiene el tambor? Pues tántos como ceros tiene el conjunto de funciones de Bessel, es decir, es infinito, así el conjunto de frecuencias que tiene el tambor es precisamente

$$f_{nm} = \frac{k_{nm}c}{2\pi} \quad (3.63)$$

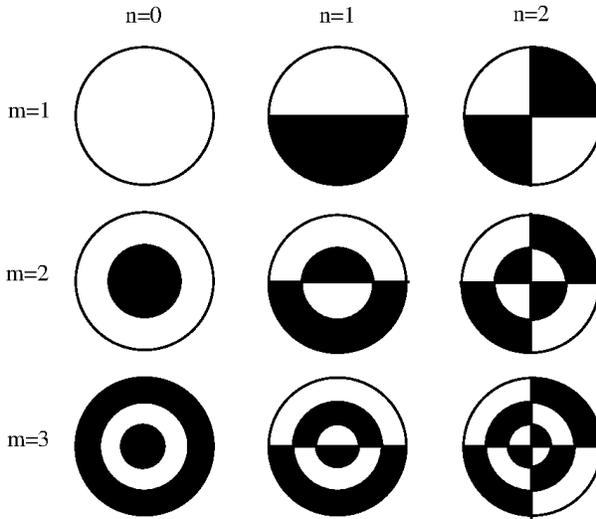


Fig. 3.5c

y donde la solución de la función temporal  $T$  es

$$T_{nm} = C_{nm} \operatorname{sen}(k_{nm}ct) + D_{nm} \operatorname{cos}(k_{nm}ct) \quad (3.64)$$

En muchos instrumentos, como el piano, cada cuerda al vibrar genera su frecuencia fundamental y todos sus armónicos correspondientes, donde los armónicos tienen la frecuencia fundamental multiplicada por un entero. Sin embargo en el caso del tambor, el conjunto de frecuencias que obtenemos no son armónicos de las frecuencias más bajas, esto es porque la razón de los ceros de las funciones de Bessel no son números irracionales.

Al juntar la solución espacial (3.62) con la temporal (3.64) obtenemos la solución completa de la ecuación del tambor

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(k_{nm}r) \cos(n\theta) (A_{nm} \operatorname{sen}(k_{nm}ct) + B_{nm} \operatorname{cos}(k_{nm}ct)) \quad (3.65)$$

La forma que adquiere la membrana al vibrar es la combinación de el conjunto de patrones que hemos mostrado en la figura Fig.3.5c. Cada patrón vibra en forma tal que mantiene en cero las líneas nodales que lo componen. Esta forma de vibrar la podemos observar en la figura Fig. 3.5c para distintos valores de  $n$  y  $m$ . Por último nos podemos preguntar sobre los valores que tienen los coeficiente  $A$  y  $B$  en la solución general, estos valores dependen de la condición inicial del problema. En general no es fácil asignar estos valores pero podemos mostrar un ejemplo de como se hace.

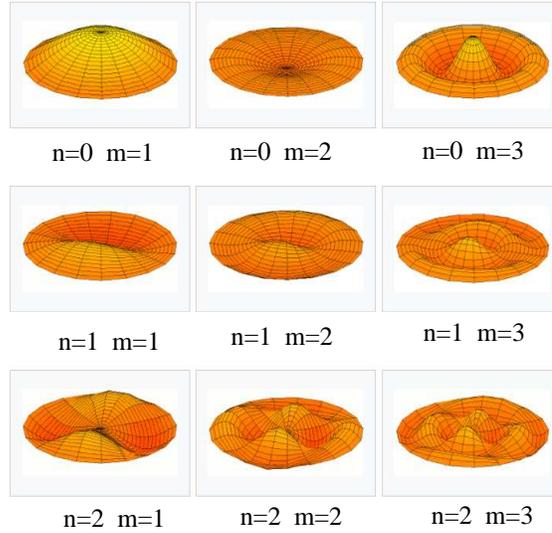


Fig. 3.5d

Por facilidad supongamos que la condición inicial tiene simetría axial, es decir, solo depende de la coordenada radial. De esta forma supongamos que la solución al tiempo inicial,  $t = 0$ , la podemos escribir como

$$u(r, t = 0) = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_0(k_{0m}) \quad (3.66)$$

Es claro que el único valor posible del índice  $n$  es el cero porque son las únicas funciones de Bessel que preservan la simetría axial. Las funciones de Bessel tienen la propiedad de ser ortogonales, tal que

$$\int_0^1 r J_0(k_{0i}r) J_0(k_{0j}r) dr = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ \frac{1}{2} J_1^2(k_{0i}) & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.67)$$

Al usar a  $f(r)$  como condición inicial de Dirichlet (donde la condición de Neumann

la consideramos nula), podemos calcular el siguiente producto escalar,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 r u(r) J_0(k_0 i) dr \\
 &= \int_0^1 r f(r) J_0(k_0 i) dr \\
 &= \int_0^1 r \left( \sum_{m=0}^{\infty} A_m J_0(k_0 m) \right) J_0(k_0 i) dr \\
 &= \frac{1}{2} A_i J_1^2(k_0 i)
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

Por lo tanto,

$$A_i = \frac{2 \int_0^1 r f(r) J_0(k_0 i) dr}{\frac{1}{2} J_1^2(k_0 i)} \tag{3.69}$$

para todo  $i = 1, 2, \dots$

Finalmente, podemos concluir que si escuchamos un tambor, al determinar que sus frecuencias de oscilación corresponden a los ceros de las funciones de Bessel multiplicados por la velocidad del medio que es  $c$ , entonces podemos decir que escuchamos la forma del tambor que tiene simetría axial, como lo vemos en la figura Fig.3.4a. Para tambores que no tienen simetría axial es una pregunta abierta sobre ¿Cómo se escucha la forma de un tambor?

### 3.2.7. Problemas elípticos en dominios no acotados y transformadas integrales

En esta sección vamos a mostrar como se trabaja con dominios no acotados en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales, para ello vamos a hacer uso de las transformadas integrales (en vez de utilizar como solución series infinitas cuando los dominios son acotados). Vamos a seguir utilizando el método de separación de variables pero en el contexto de transformadas integrales, al igual que en separación de variables el propósito de este método es reducir la ecuación en derivadas parciales a resolver una ecuación diferencial ordinaria. Una de las complicaciones que puede tener los métodos de transformadas integrales es evaluar la transformación que nos regresa al sistema de coordenadas originales. Para iniciarnos en estos métodos comencemos con un ejemplo sencillo pero no trivial.

Como primer ejemplo consideremos el problema de Dirichlet en el semiplano  $z \leq 0$ , con dato de frontera  $u(x, 0) = f(x)$  en  $-\infty < x < \infty$  como se muestra en la Fig. 3.5. La idea para resolver el problema es de nuevo desarrollar la  $u$  en términos de funciones más sencillas. En este caso la herramienta natural es la transformada de Fourier

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx,$$

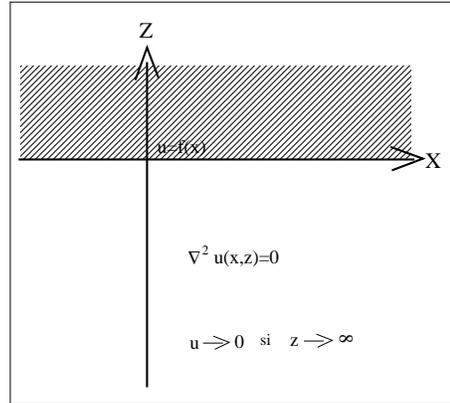


Fig. 3.5

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk. \quad (3.70)$$

Procedemos ahora como en el caso de regiones finitas y escribimos  $u(x, z)$  en la forma

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, z) e^{ikx} dk$$

Así vemos que al aplicar el operador laplaciano a  $u$  obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla^2 u(x, z) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, z) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, z) \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{ikx} dk + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}(k, z) e^{ikx} dk \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -k^2 \hat{u}(k, z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{u}(k, z) \right) e^{ikx} dk \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.71)$$

De esta forma observamos que necesariamente el argumento de la integral debe de ser cero, así encontramos de esta forma para  $\hat{u}(k, z)$  la ecuación ordinaria

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, z)_{zz} - k^2 \hat{u}(k, z) &= 0, \quad z \leq 0, \\ \hat{u}(k, z) &\rightarrow 0 \quad \text{si } z \rightarrow -\infty, \\ u(x, 0) &= f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, 0) e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

De esta última ecuación podemos concluir que  $\hat{u}(k, 0) = \hat{f}(k)$ , por lo cual  $\hat{f}(k)$  es la condición inicial de la ecuación diferencial ordinaria de  $\hat{u}$ .

Resolviendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}\hat{u}(k, z) &= e^{|k|z} \hat{f}(k), \\ u(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} \hat{f}(k) e^{ikx} dk.\end{aligned}\quad (3.72)$$

donde verificamos que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} e^{|k|z} \hat{f}(k) = 0 \quad (3.73)$$

En (3.72) se ve que cuando  $f \in C^\infty(\mathbf{R})$  es de soporte compacto,  $u(x, z)$  es infinitamente derivable para  $z \leq 0$ . Además como la (3.70) efectivamente es válida en esa situación, tendremos la existencia de una solución clásica del problema para datos  $f \in C^\infty(\mathbf{R})$  con soporte compacto.

Resulta interesante reescribir (3.72) en forma análoga a la fórmula de Poisson obtenida para el círculo. Si en (3.72) sustituimos  $\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik\xi} d\xi$  obtenemos

$$u(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{ik\xi} d\xi \right) e^{ikx} dx \quad (3.74)$$

Si ahora aplicamos el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración, llegamos a que

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} e^{ik(x-\xi)} dk \right) d\xi \quad (3.75)$$

Si definimos

$$K(\eta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} e^{ik\eta} dk \quad (3.76)$$

obtendremos entonces:

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - \xi, z) f(\xi) d\xi \quad (3.77)$$

Lo que hemos hecho anteriormente no es más que aplicar el teorema de la convolución para la transformada de Fourier.

La función  $K(\eta, z)$  se puede integrar de forma explícita por medio del siguiente procedimiento,

$$\begin{aligned}K(\eta, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} e^{ik\eta} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{|k|z} \{ \cos(k\eta) + i \operatorname{sen}(k\eta) \} dk\end{aligned}\quad (3.78)$$

Notemos que la función  $e^{|k|z}$  es una función par respecto a  $k$  y que las funciones seno y coseno son funciones pares e impares respectivamente. Así al integrar en toda la recta real el producto de una función par por una impar da como resultado cero. Siguiendo entonces con la integración y considerando que la integración del producto de dos funciones pares en todo el intervalo es igual a dos veces la integral de cero a infinito,

$$\begin{aligned}
 K(\eta, z) &= \frac{1}{2\pi} 2 \int_0^{\infty} e^{|k|z} \cos(k\eta) dk \\
 &= \frac{1}{\pi} \frac{1}{k} e^{|k|z} \operatorname{sen}(k\eta) \Big|_0^{\infty} - \frac{z}{\pi\eta} \int_0^{\infty} e^{|k|z} \sin(k\eta) dk \\
 &= -\frac{z}{\pi\eta} \left( -e^{|k|z} \frac{1}{\pi} \cos(k\eta) \right) \Big|_0^{\infty} + \frac{z^2}{\pi\eta^2} \int_0^{\infty} e^{|k|z} \cos(k\eta) dk \quad (3.79) \\
 &= -\frac{z}{\pi^2\eta} + \frac{z^2}{\pi\eta^2} \int_0^{\infty} e^{|k|z} \cos(k\eta) dk \\
 &= -\frac{z}{\pi^2\eta} + \frac{z^2}{\eta^2} K(\eta, z)
 \end{aligned}$$

observe que al hacer las integraciones por partes, al evaluar el límite en  $k \rightarrow \infty$  este da cero porque la función exponencial  $e^{|k|z} \rightarrow 0$  debido a que  $z < 0$  porque trabajamos en el semiplano inferior. Aprovechando que hemos regresado a la misma integral, esta la podemos despejar de tal forma que la integral resulta ser

$$K(\eta, z) = \frac{1}{\pi} \frac{z}{\eta^2 + z^2} \quad (3.80)$$

Aplicando este resultado, entonces la solución del problema de la ecuación de Laplace en el el semiplano inferior, con la condición de frontera de Dirichlet  $u(x, 0) = f(x)$  y con la condición de amortiguamiento  $\lim_{z \rightarrow -\infty} u(x, z) = 0$  es

$$u(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(x - \xi)^2 + z^2} f(\xi) d\xi.$$

Queda como un ejercicio el plantear y resolver el problema de Neumann para el semiplano.

Consideremos ahora un problema de gran importancia en aplicaciones que da origen a un problema elíptico de una región infinita, a saber, el problema de difracción.

### 3.2.8. Problema de difracción

Una situación de gran interés en aplicaciones en las que aparecen ecuaciones elípticas es en problemas de difracción de ondas por obstáculos. En este caso las ecuaciones

elípticas aparecen como una simplificación de la ecuación de movimiento original. En estas notas consideraremos sólo un ejemplo simple; algunos ejemplos más complicados y una discusión más detallada de la solución serán objeto de otros capítulos en este curso. Consideremos la difracción de una onda plana que incide sobre un cilindro infinito cuyo eje es paralelo al eje  $z$  tal como lo vemos en la figura Fig. 3.6. Para simplificar el problema supondremos que el vector  $\mathbf{k}$  de propagación de la onda plana está en el plano  $(x, y)$  y en este caso el problema es bidimensional.

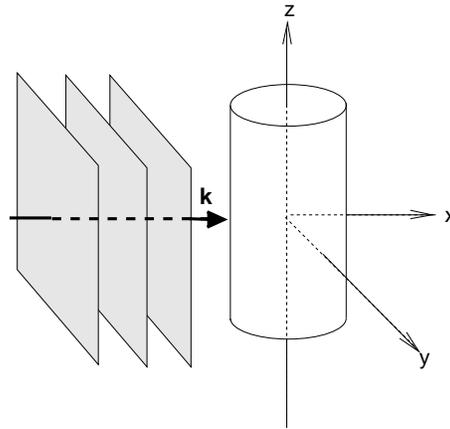


Fig. 3.6

La ecuación por resolver es la ecuación de onda

$$u_{xx} + u_{yy} = \frac{1}{c^2} u_{tt} \quad (3.81)$$

y en principio deben darse condiciones iniciales, y datos de frontera apropiados que representen tanto al obstáculo como a la fuente que genera la onda plana incidente. Las condiciones de frontera que representan el obstáculo son frecuentemente  $u = 0$  o bien  $u_n = 0$  en las paredes del obstáculo, donde  $u_n$  es la derivada normal de  $u$  en el cilindro, así no presentan mayor dificultad el decidir las en cada caso. Lo que resulta más difícil es resolver el problema con valores iniciales, por este motivo se busca una simplificación en la cuál se reduzca el número de variables. Por lo anterior, en lugar de considerar la fuente en detalle, se considera una onda plana  $Ae^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-wt)}$  que viaja hacia el objeto, y uno se pregunta cuánto vale el campo de difracción al chocar dicha onda plana contra el objeto. Como la situación es periódica en el tiempo, se espera que la onda difractada tenga también una dependencia  $e^{iwt}$ . De lo anteriormente expuesto, es claro que debemos buscar una solución de la ecuación (3.81) en la forma

$$u = Ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{iwt} + v(\mathbf{x}) e^{iwt} \quad (3.82)$$

donde  $v(\mathbf{x})$  es la onda difractada. Debemos encontrar ahora una ecuación y condiciones de frontera apropiadas para  $v$ . La ecuación para  $v$  se obtiene sustituyendo la (3.82) por la (3.81) y recordando que  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ , ya que la onda plana es una solución de la ecuación de onda. La expresión para  $v$  es

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0, \quad \text{fuera del obstáculo.} \quad (3.83)$$

La condición de frontera sobre el obstáculo es

$$v(\mathbf{x}) = -Ae^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{para } \mathbf{x} \text{ en la frontera del obstáculo.}$$

Lo que resulta un poco más complicado es la expresión del hecho que  $v$  se comporta como una onda efectivamente reflejada. ¿En qué forma se va a propagar la onda reflejada  $v$ ? Aquí vamos a suponer que se va a propagar como una onda circular, tal como lo vemos en las ondas de agua cuando alcanzan un obstáculo. Lo primero que se debe pedir es que lejos del obstáculo,  $v$  represente una onda que se aleje. Esto se puede expresar, si  $r$  es la coordenada radial, diciendo que  $e^{i\omega t} v \sim f(r - ct)$  para  $r$  grandes, es decir, la onda se propaga a lo largo de rectas características radiales teniendo como origen el eje del cilindro. Además por el hecho de estar en una situación estacionaria, la energía radiada a lo lejos del obstáculo por la onda reflejada  $v$  debe ser una constante. Como  $|v|^2$  es una medida de la densidad de energía, debemos tener que  $e^{i\omega t} v \sim \frac{f(r - ct)}{\sqrt{r}}$  para  $r \rightarrow \infty$ , ya que de esta manera

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Energía radiada } dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} |v|^2 r d\theta = \text{constante, para } r \rightarrow \infty.$$

donde debemos recordar que la función  $f(r - ct)$  conserva su valor al moverse sobre cada recta característica radial.

Con estas observaciones, la ecuación y condiciones de frontera para  $v$  son

$$\begin{aligned} \nabla^2 v + k^2 v &= 0, \quad \text{fuera del obstáculo,} \\ v &= -Ae^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \quad \text{en la frontera del obstáculo,} \\ e^{i\omega t} v &\sim \frac{f(r - ct)}{\sqrt{r}} \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.84)$$

El problema (3.84) es conocido como problema de radiación para la ecuación de Helmholtz. La condición sobre el comportamiento de  $v$ , cuando  $r \rightarrow \infty$ , se llama condición de radiación y fue utilizada por Sommerfeld a principios de este siglo.

Para resolver (3.84) es conveniente cambiar a coordenadas polares, escogiendo como eje polar el vector  $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r}(rv_r)_r + \frac{1}{r^2}v_{\theta\theta} + k^2 v &= 0; \quad r \geq a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ v &= -Ae^{-ik\alpha \cos \theta}, \quad r = a, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ e^{i\omega t} v &\sim \frac{f(r - ct)}{\sqrt{r}}, \quad \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.85)$$

siendo  $\alpha$  el radio del cilindro.

Buscamos una solución de (3.85) en la forma:

$$v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ a_n(r) \cos(n\theta) + b_n(r) \sin(n\theta) \right\}. \quad (3.86)$$

Como la condición de frontera es par, sólo necesitamos los coeficientes  $a_n(r)$ , es decir,  $b_n(r) = 0$ ,  $n \geq 1$ . Al sustituir (3.86) en (3.85), encontramos las siguientes ecuaciones ordinarias para los coeficientes:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{da_n}{dr} \right) - \frac{n^2}{r^2} a_n + k^2 a_n = 0. \quad (3.87)$$

La condición de frontera es  $v(\alpha, \theta) = -Ae^{-ik\alpha \cos \theta}$ , podemos tomar la integral en ambos lados de  $\cos(n\theta)$  quedándonos,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} v(\alpha, \theta) \cos(n\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} a_m(\alpha) \cos(m\theta) \right\} \cos(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -Ae^{-ik\alpha \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (3.88)$$

La última integral es una de las representaciones de las funciones de Bessel que es igual a  $2A(-i)^n J_n(n\alpha)$ . De la integral de enmedio solo sobrevive un solo término debido a la ortogonalidad de la familia de funciones  $\cos(n\theta)$ . Finalmente, la condición de frontera en el obstáculo nos da:

$$a_n(\alpha) = \int_0^{2\pi} -Ae^{-ik\alpha \cos \theta} \cos(n\theta) d\theta = \frac{2(i)^n A}{\pi} J_n(k\alpha). \quad (3.89)$$

La (3.87) es una ecuación muy estudiada; se llama la ecuación de Bessel. Tiene dos soluciones linealmente independientes las cuales se comportan como  $(kr)^n$  y  $(kr)^{-n}$  para  $r$  pequeño. Hay dos soluciones estandarizadas de una manera sistemática que se llaman las funciones de Bessel, las cuales se denotan por

$$\begin{aligned} J_n(kr) &\sim (kr)^n, & r \rightarrow 0, \\ Y_n(kr) &\sim (kr)^{-n}, & r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En la figura Fig. 3.5b podemos ver como se comportan la familia de funciones  $J_n$ , la familia  $Y_n$  es similar salvo que todas estas funciones divergen hacia  $-\infty$  cuando  $r \rightarrow 0$ .

Para determinar las constantes arbitrarias debemos usar la condición en  $r = \alpha$  y  $r \rightarrow \infty$ . Para esto necesitamos tener información sobre el comportamiento de las funciones  $J_n$  y  $Y_n$  tanto en la frontera como para  $r$  muy grande. Recordemos que la condición de amortiguamiento de Sommerfeld expresada en la ecuación (3.84), de tal

forma que la componente radial de la función  $v$  debe decaer como  $1/\sqrt{r}$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Por esta razón rescribimos a las funciones  $a_n$  de la siguiente forma,  $a_n(r) = r^{-\frac{1}{2}}f_n(r)$  y al sustituirlas en (3.87) obtenemos

$$f_n'' + k^2 f_n + \frac{1}{r^2}(\frac{1}{4} - n^2)f_n = 0 \quad (3.90)$$

de donde vemos que cuando  $r \rightarrow \infty$  podemos despreciar el tercer término de (3.90) quedándonos una ecuación de oscilador armónico, de esta manera las funciones de Bessel se comportan como funciones senos y cosenos moduladas por el término  $1/\sqrt{r}$  cuando  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} J_n(kr) &\sim A_n \frac{\cos(kr)}{\sqrt{r}} + B_n \frac{\sin(kr)}{\sqrt{r}}, \\ Y_n(kr) &\sim C_n \frac{\cos(kr)}{\sqrt{r}} + D_n \frac{\sin(kr)}{\sqrt{r}}. \end{aligned} \quad (3.91)$$

De (3.91) vemos que es posible escoger una nueva combinación lineal

$$E_n J_n + F_n Y_n \sim G_n \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow \infty, \quad (3.92)$$

que satisfaga la condición

$$G_n \frac{e^{-i(kr-kt)}}{\sqrt{r}}, \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.93)$$

La solución de (3.87) con el comportamiento mostrado en (3.93) convenientemente normalizada se denota por  $H_n^{(2)}$  y se llama función de Hankel de segunda clase. En esta nueva notación la solución para  $a_n(r)$  es

$$a_n(r) = -A \frac{J_n(k\alpha)}{H_n^{(2)}(k\alpha)} H_n^{(2)}(kr).$$

La solución formal al problema es entonces

$$u(r, \theta) = -A \left\{ \frac{J_0(k\alpha)}{H_0^{(2)}(k\alpha)} H_0^{(2)}(kr) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \frac{J_n(k\alpha)}{H_n^{(2)}(k\alpha)} H_n^{(2)}(kr) \cos(n\theta) \right\}. \quad (3.94)$$

Cuando el producto  $k\alpha \ll 1$ , es decir, la longitud de onda es comparada con el tamaño del objeto, entonces la (3.94) converge muy rápidamente y pocos términos son suficientes para obtener una buena idea de la solución. Cuando  $1 \ll k\alpha$  la (3.94) da poca información y por lo tanto se debe recurrir a técnicas más específicas para obtener información útil.

La discusión de la validez de (3.94) es semejante a otras series de Fourier. La prueba de unicidad de la solución de (3.85) está detallada y discutida en el libro de Courant-Hilbert [3].



## Capítulo 4

# Funciones de Green

En los capítulos anteriores hemos visto como la solución de las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden elípticas dependen fuertemente de las condiciones de frontera, pero algo que quizás no le hemos dado mucho valor es la forma de la frontera. La geometría que define la frontera tiene un peso enorme en la forma que adquiere la solución. Un primer punto que debemos considerar en la frontera es si esta es finita o infinita, ya hemos comentado que si la frontera es infinita entonces debemos utilizar métodos de transformadas integrales para proponer la solución, en cambio si esta es finita entonces podemos aplicar los métodos de separación de variables donde la solución la expresamos como una suma infinita de funciones. Por otro lado la simetrías que tiene la frontera son muy importantes para determinar el sistema coordenado que hay que utilizar. La dependencia de la frontera en la construcción de la solución la podemos observar en la fórmula de Poisson que desarrollamos en la sección 3.2.3 y 3.2.4, es muy importante observar que la forma de la soluciones ahí expuestas dependen linealmente de condición de frontera tal como lo apreciamos en las ecuaciones (3.40) y (3.46). En estas formulas la condición de frontera es evaluada a través de un operador integral via una convolución de la condición de frontera con un función que solo depende de las propiedades geométricas del problema, el cual lo hemos construido gracias a las propiedades de simetría que tiene la frontera. Este hecho, que puede parecer como un caso particular de estos ejemplos tiene un aspecto mucho más profundo y que se puede generalizar para todas las ecuaciones elípticas, ya sea que tengan dominios acotados o infinitos. Fue George Green, matemático británico (1793-1841) quien fundamentó y sistematizó una metodología para expresar en forma muy general la solución a los problemas elípticos. En este capítulo vamos a adentrarnos en el método de Green, lo haremos viendo casos en una dos y tres dimensiones, sin embargo, como veremos al estudiar las proposiciones que desarrollo Green, estos métodos pueden ser utilizados en cualquier dimensión.

En la primera parte trabajaremos en una dimensión, donde las ecuaciones diferenciales son por lo tanto ecuaciones ordinarias de segundo orden. En el caso de una dimensión

la solución del problema lineal de ecuaciones diferenciales de segundo orden (lo que corresponde a una ecuación de Laplace o Poisson) son simples de resolver, sin embargo presentaremos una forma de expresar la solución donde las condiciones de frontera queda expuesta explícitamente en la solución en forma lineal. En este caso puede carecer de mucha utilidad esta construcción pero al aumentar la dimensión del problema ya deja de ser una construcción trivial. En la siguiente sección vamos a introducir las funciones impulso que van a ser la base del método de Green y que corresponden a soluciones de la ecuación de Poisson donde la parte derecha de la ecuación contiene una singularidad. A continuación desarrollaremos las identidades de Green que dan marco a la formalización de este método y en las siguientes secciones mostraremos como se construyen las soluciones en función de la geometría de la frontera donde aprovecharemos fuertemente sus simetrías.

Como un último comentario antes de comenzar este capítulo, los estudiantes de Física al pasar por sus cursos de electrodinámica aprenden los métodos de imágenes, estos métodos parecen un truco que permite encontrar en forma simple la solución a problemas que tienen una simetría particular. Lo que queremos mostrar en este capítulo es que dichos métodos de imágenes es una forma de construir las soluciones de los problemas elípticos via las formulas de Green. Además veremos que estos métodos de Green van más allá del ámbito de las ecuaciones elípticas, pues pueden ser utilizado para resolver problemas de propagación de ondas, problemas de calor donde debemos resolver ecuaciones parabólicas, etc. Como se verá, este capítulo es solo una introducción a los métodos de Green y esperamos que el estudiante llegue a apreciar la amplitud y generalidad de estos métodos.

## 4.1. El problema de la ecuación de Laplace en una dimensión

Para comenzar el estudio de las funciones de Green vamos a proponer un problema donde pretendemos obtener la solución de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con condiciones de frontera de tipo Dirichlet:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq l \quad ,$$

con valores en la frontera  $u(0) = u_1$  y  $u(l) = u_2$ .

En general no es fácil resolver los problemas de ecuaciones ordinarias cuando damos condiciones a la frontera. En este caso es simple adivinar la solución puesto que es una línea recta, la cual se escribe de esta forma:

$$u(x) = \frac{u_2 - u_1}{l}x + u_1 \quad .$$

Ahora vamos a proponer una forma alternativa de resolver este problema. La idea es encontrar una función que sea solución de la ecuación diferencial  $d^2u/dx^2 = 0$

4.1. EL PROBLEMA DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN UNA DIMENSIÓN 103

perturbada por un escalón de potencial tal como lo vemos en la figura Fig. 4.1 y con condiciones de frontera nulas:

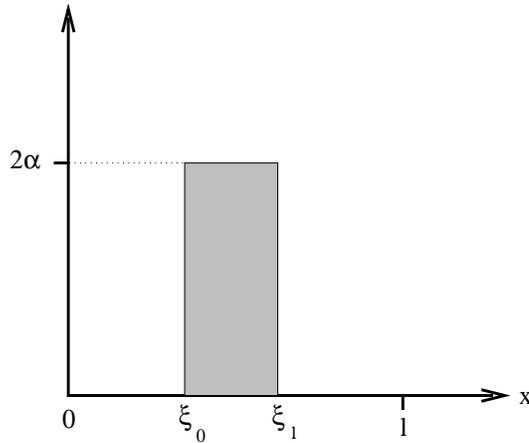


Fig. 4.1

$$\frac{d^2}{dx^2}G(x, \xi_0, \xi_1) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \xi_0 \text{ ,} \\ 2\alpha & \xi_0 \leq x \leq \xi_1 \text{ ,} \\ 0 & \xi_1 < x \leq l \end{cases}$$

y donde pedimos que  $G(0, \xi_0, \xi_1) = G(l, \xi_0, \xi_1) = 0$ . Es claro que las soluciones en los intervalos  $0 \leq x < \xi_0$  y  $\xi_1 < x \leq l$  son líneas rectas y en el intervalo  $\xi_0 \leq x \leq \xi_1$  corresponde a una parábola. De esta forma proponemos la siguiente solución:

$$G(x, \xi_0, \xi_1) = \begin{cases} ax & 0 \leq x < \xi_0 \text{ ,} \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma & \xi_0 \leq x \leq \xi_1 \text{ ,} \\ c(x - l) & \xi_1 < x \leq l \text{ .} \end{cases}$$

Debemos pedir continuidad a esta solución además de las condiciones de frontera. Una condición adicional que añadimos es que  $c - a = 1$  la cual significa que la diferencia de las derivadas de  $G$  en los puntos  $\xi_0$  y  $\xi_1$  dan el valor uno, esta es una aproximación del valor de la segunda derivada en estos puntos singulares.

Los coeficientes  $a$ ,  $c$  y  $\gamma$  pueden escribirse en función del parámetro  $\beta$  de la siguiente forma:

$$a = \frac{2\alpha(\xi_0^2 - \xi^2) + \xi_1 - l}{\xi_0 - \xi_1 + l}$$

$$c = \frac{2\alpha(\xi_0^2 - \xi^2) + \xi_0}{\xi_0 - \xi_1 + l} \quad (4.1)$$

$$\gamma = \frac{2\alpha(\xi_0^2 - \xi^2) + \xi_0}{\xi_0 - \xi_1 + l} (\xi_1 - l) - \alpha \left( \xi_1 - \frac{\xi_0 + \xi_1}{2} \right)^2$$

Nos interesa considerar el límite cuando el ancho del escalón de potencial tiende a cero, es decir cuando  $\xi_0 = \xi_1 = \xi$ . Al considerar este límite, los coeficientes  $a$  y  $c$  quedan escritos como  $a = \frac{\xi - l}{l}$  y  $c = \frac{\xi}{l}$ . De esta forma la función  $G(x, \xi)$  la representamos así:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi - l}{l} x & 0 \leq x < \xi \quad , \\ \frac{\xi}{l} (x - l) & \xi < x \leq l \quad . \end{cases}$$

Nuestro propósito ahora es mostrar como podemos aprovechar esta solución singular para resolver el problema de valores a la frontera que mostramos al principio de la sección.

Definimos la solución de la ecuación  $d^2u/dx^2 = 0$ , con las condiciones de frontera tipo Dirichlet de la forma siguiente:

$$u(\xi) = -u(0) \frac{\partial}{\partial x} G(0, \xi) + u(l) \frac{\partial}{\partial x} G(l, \xi) \quad ,$$

es decir, evaluamos la función  $u(x) \partial G(x, \xi) / \partial x$  en los valores a la frontera y los sumamos, en este caso solo tenemos dos valores en la frontera. El resultado es  $u(\xi) = (u_2 - u_1) \xi / l + u_1$ , la cual es exactamente la solución que se habíamos adivinado del problema inicial.

Es importante que el lector aprecie la forma sistemática de resolver el problema de la ecuación de Laplace en una dimensión con valores de frontera de tipo Dirichlet.

También es posible obtener este tipo de solución cuando tenemos problemas con condiciones de frontera tipo Neumann, en este caso la función  $u(\xi)$  se escribe de esta forma:

$$u(\xi) = - \left( \frac{\partial u}{\partial x}(0) G(0, \xi) + \frac{\partial u}{\partial x}(l) G(l, \xi) \right)$$

donde  $\frac{\partial u}{\partial x}$  es evaluado en 0 y en  $l$ , estas son las condiciones de frontera.

Dejamos al lector repetir este esquema de solución pero ahora para una ecuación de Poisson:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = f(x) \quad \text{en} \quad 0 \leq x \leq l$$

y donde las condiciones de frontera son de tipo Dirichlet,  $u(0) = u_1$  y  $u(l) = u_2$ . Utilice la misma función  $G(x, \xi)$  que encontramos para el problema de Laplace unidimensional y calcule la solución de la siguiente forma:

$$u(\xi) = u(0) \frac{\partial}{\partial x} G(0, \xi) + u(l) \frac{\partial}{\partial x} G(l, \xi) + \int_0^l f(r) G(r, \xi) dr \quad ,$$

utilice para hacer este ejercicio el siguiente potencial,  $f(x) = A \sin(\pi x/l)$ .

Si bien, este tipo de problemas de ecuaciones diferenciales lineales tienen una forma sencilla de solución, el introducir la función  $G(x, \xi)$  nos da una forma sistemática de solución de este tipo de ecuaciones. En una dimensión parece no tener mayor importancia esta forma de resolver las ecuaciones pero en dimensiones superiores nos abre un abanico de posibilidades para resolver ecuaciones elípticas lineales de segundo orden tanto para la ecuación de Laplace, de Poisson y el ecuación de Helmholtz.

## 4.2. Función impulso-respuesta

Consideremos un problema descrito por la ecuación de Poisson definida sobre un círculo unitario y con condiciones de frontera de Dirichlet nulas en la circunferencia unitaria:

$$\nabla^2 u(r, \theta) = f(r, \theta) \quad , \quad r < 1 \quad , \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4.2)$$

y

$$u(1, \theta) = 0 \quad , \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad .$$

Si la parte derecha de la ecuación la consideramos constante, tal que  $f(r, \theta) = -q$  entonces tenemos el caso de un problema de electrostática (donde  $u$  representa el valor de voltaje), o bien si  $f(r, \theta) = -\frac{lg}{T}$  tenemos un problema de elasticidad, tal como lo hemos establecido en la ecuación (3.12). Hemos visto que en el caso elástico, la membrana toma una forma cóncava hacia abajo de manera similar como se deformaría una membrana bajo la acción de un chorro de aire. La concavidad de la membrana es constante en todo punto.

En el caso que  $f(r, \theta)$  no sea una función constante, entonces la concavidad de la membrana cambia de punto a punto. Consideremos ahora que la función  $f(r, \theta)$  representa la acción de jalar la membrana en un sólo punto, lo cual llamaremos a esta acción un impulso o una fuente (o correspondientemente un sumidero). Por simplicidad pensemos que este impulso o fuente se da en el centro del círculo unitario. Por simetría, la función  $u$  y sus derivadas solo dependen de la coordenada radial. Definamos el flujo como el valor de la derivada normal de  $u$  sobre una superficie cerrada (o una curva cerrada para el caso que estamos examinando). El flujo total  $F(r)$  se obtiene

integrando el flujo sobre toda la superficie o curva cerrada. En este caso consideremos una circunferencia de radio  $r < 1$ :

$$F(r) = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u(r)}{\partial r} r d\theta = -2\pi r \frac{\partial u}{\partial r}(r) \quad .$$

El flujo total debe de coincidir con la fuente en el origen,  $f(r=0, \theta) = \frac{\rho g}{T}$ , la cual se puede interpretar mecánicamente como una fuerza promedio:

$$-2\pi r \frac{\partial u}{\partial r}(r) = \frac{\rho g}{T} \quad .$$

Entonces,

$$u(r) = \frac{\rho g}{2\pi T} \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad , \quad (4.3)$$

donde vemos que esta solución es singular en el origen. Tal solución la podemos entender como si jaláramos una membrana circular en su punto medio una distancia infinita, tal como se ve en la figura izquierda en Fig. 4.2

De forma más matemática podemos decir que el estirar la membrana en un solo punto  $(x_0, y_0)$ , lo podemos denotar como la siguiente ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 u(x, y) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (4.4)$$

donde  $\delta(x)$  es la delta de Dirac y donde la solución a esta ecuación es precisamente

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{R}\right) \quad (4.5)$$

siendo  $R = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Esta solución es válida en todo el plano y podemos verificar que el laplaciano de (4.5) es cero en todo el plano excepto en el punto  $(x_0, y_0)$  que es donde se ha dado el estirón.

En el caso que estiremos de forma infinita la membrana en otro punto distinto al origen obtendríamos una solución cuya forma sería como se muestra en la figura derecha de Fig. 4.2. La altura de la membrana la podemos representar por la función  $G(r, \theta, p, \phi)$ , donde  $(r, \theta)$  representa la coordenada donde medimos la altura de la membrana o donde se está estirando la membrana. Esta función es la solución de la ecuación (4.2) cuando la función  $f(r, \theta)$  representa una fuente puntual. A esta función le llamamos *función de Green*. La utilidad que tiene esta función viene del hecho de descomponer la parte derecha de la ecuación (4.2) como un conjunto continuo de fuentes, que son “moduladas” por la función  $f(r, \theta)$ , así la solución corresponde a sumar todas las soluciones debidas a cada fuente puntual localizada en el punto  $(\rho_i, \phi_i)$ , con  $i = 0, \dots, N$ , las cuales son moduladas por la función  $f(r, \theta)$  :

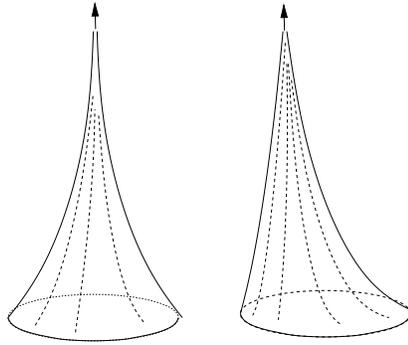


Fig. 4.2

$$u(r, \theta) = \sum_{i=0}^N G(r, \theta, \rho_i, \phi_i) f(\rho_i, \phi_i) \quad (4.6)$$

Esta expresión la justificaremos más adelante, sin embargo podemos observar que esta relación es similar al problema de Poisson que se propuso para el caso unidimensional en la sección anterior.

### 4.3. Método de imágenes

La solución de la ecuación de Poisson que tenemos en (4.5) la construimos para la condición de frontera  $u = 0$  en el círculo de radio 1, pero esta solución también aplica para el problema no acotado donde nuestro espacio es todo el plano. Así el laplaciano de  $u$  va a ser cero en todo el plano excepto en el punto donde se le ha aplicado el estirón, que es el único punto donde el laplaciano es distinto a cero. Este hecho va a ser fundamental en el método de imágenes.

Consideremos un problema de una membrana donde aplicamos una fuente (o estirón infinito) en un punto y pedimos que la membrana no se deforme en una línea recta en el plano. Vamos a suponer la membrana infinita y la línea recta, donde la membrana no se deforma por estirla, que coincida con el eje  $y$ . Si aplicamos un estirón en algún punto con coordenadas  $(x, y)$  y al mismo tiempo estiramos en dirección contraria pero con la misma intensidad en el punto reflejado sobre la recta,  $(-x, y)$ , entonces podemos ver por simetría que la membrana no se deforma en la recta  $x = 0$ , tal como lo podemos observar en la figura Fig. 4.3.

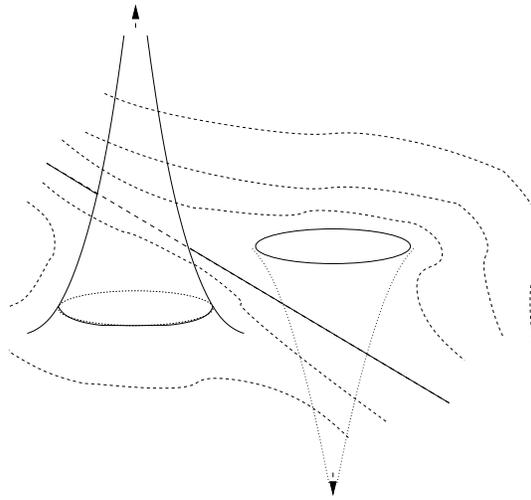


Fig. 4.3

Tomemos la solución (4.5) calculada en los puntos  $(x_0, y_0)$  y  $(-x_0, y_0)$ , entonces la solución a este problema está descrito de la siguiente forma:

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) = \frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{c}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{\hat{R}}\right) , \quad (4.7)$$

donde  $R = ((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$  y  $\hat{R} = ((x + x_0)^2 + (y - y_0)^2)^{1/2}$ .

Esta solución se ha obtenido con ayuda de un segundo estirón en el punto  $(-x_0, y_0)$ , donde es claro que  $u(0, y) = 0$ .

Si ahora solo consideramos el semiplano  $x > 0$  como nuestro dominio, vemos que la expresión (4.7) se cumple la siguiente ecuación de Poisson de esta forma en dicho semiplano:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= \delta(x - x_0)\delta(y) \\ \nabla^2 u(x, y) &= \underbrace{\nabla^2 u_1(x, y)}_{\delta(x - x_0)\delta(y)} + \underbrace{\nabla^2 u_2(x, y)}_0\end{aligned}\quad (4.8)$$

Es claro que el laplaciano de  $u_2$  va a ser cero en todo el semiplano  $x > 0$  debido a que el único punto donde este laplaciano es distinto de cero está en el otro semiplano ( $x < 0$ ), así que cuando agregamos a  $u_1$  la función  $u_2$  esta no altera la ecuación diferencial en el semiplano  $x > 0$  pero tiene la virtud que al tomar la suma de  $u_1$  con  $u_2$  esta suma de funciones se va a anular en la línea  $x = 0$  que es precisamente la condición de frontera que le hemos impuesto a nuestra ecuación de Poisson (4.8). A la función  $u_2$ , que es el estirón que hemos dado a la membrana en el semiplano  $x < 0$  lo podemos llamar una fuente imagen. La solución  $u(x, y)$  la denotaremos como la función de Green que cumple la ecuación de Poisson (4.8) en el semiespacio  $x > 0$  con la condición de frontera  $u = 0$  en la línea  $x = 0$ .

Otro ejemplo sencillo en el uso del método de imágenes es el resolver el problema de una fuente o estirón de una membrana en un círculo de radio unitario donde la membrana debe no deformarse sobre dicho círculo. La ecuación que debemos resolver es la siguiente

$$\begin{aligned}\nabla^2 u(x, y) &= \delta(x - x_0)\delta(y - y_0) \quad , \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 1 \\ x_0^2 + y_0^2 &\leq 1 \end{aligned} \\ u(x, y) &= 0 \quad \quad \quad x^2 + y^2 = 1\end{aligned}\quad (4.9)$$

siendo el punto  $(x_0, y_0)$  donde realizamos el estirón. Debemos notar que el dominio de la ecuación de Poisson (4.9) es el interior del círculo de radio unitario centrado en el origen. La función  $f(x, y) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$  tiende a infinito en el punto  $(x_0, y_0)$  y vale cero fuera de ese punto, esta función representa un estirón infinito en dicho punto. Solo por simplificar el problema, consideremos que el estirón se da en un punto dentro del círculo unitario que está sobre el eje  $x$ , por ejemplo en el punto  $(x_0, 0)$ , donde  $0 < x_0 < 1$ . Ahora consideremos una fuente imagen, es decir, con estirón en el punto  $(\bar{x}_0, 0)$  con  $\bar{x}_0 > 1$ , este punto está fuera del dominio de la ecuación pero ahora estamos considerando que nuestro dominio es todo el plano.

La figura 4.4 muestra la colocación de las fuentes. Es claro que al agregar la segunda fuente fuera del círculo unitario la ecuación de Poisson (4.9) no se altera, pero nuestra intensidad al agregar esta fuente o imagen es asegurar que se cumpla la condición de frontera. Para verificar que cumpla esta condición de frontera definimos un punto en la circunferencia de radio unitario  $P_0$  y sean las distancias  $R_0$  y  $\bar{R}_0$  del punto  $P_0$  a las fuentes. La solución que proponemos a este problema es

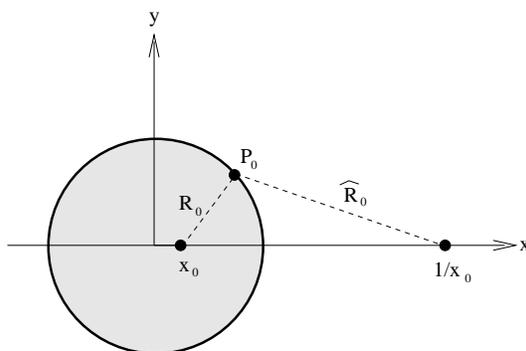


Fig. 4.4

$$u(x, y) = \ln\left(\frac{1}{R_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{\hat{R}_0}\right)$$

donde  $R_0$  y  $\hat{R}_0$  es la distancia de las fuentes a cualquier punto en el dominio pero en el caso que este punto  $P_0$  se encuentre en la frontera del dominio, podemos mostrar que si  $\hat{x}_0 = 1/x_0$ , entonces

$$\ln\left(\frac{1}{R_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{\hat{R}_0}\right) = \ln\left(\frac{\hat{R}_0}{R_0}\right) = \text{cte} \quad .$$

sobre todo el círculo unitario, es decir la función se mantiene constante en la frontera. Para verificar que esto ocurre, escribamos las distancias de la siguiente forma: si el punto en el círculo unitario lo denotamos como  $P_0 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ , con  $\theta \in [0, 2\pi)$ , entonces

$$R_0 = \sqrt{(\cos \theta - x_0)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{x_0^2 + 1 - 2x_0 \cos \theta} \quad ,$$

$$\hat{R}_0 = \sqrt{\left(\frac{1}{x_0} - \cos \theta\right)^2 + \sin^2 \theta} = \sqrt{\frac{1}{x_0^2} + 1 - \frac{2}{x_0} \cos \theta} \quad ,$$

de tal forma que

$$\frac{\hat{R}_0}{R_0} = \sqrt{\frac{\frac{1}{x_0^2} + 1 + \frac{2}{x_0} \cos \theta}{x_0^2 + 1 - 2x_0 \cos \theta}} = \sqrt{\frac{1}{x_0^2}} \quad .$$

Esta última expresión es independiente de la coordenada  $\theta$ , es decir, la expresión vale para cualquier punto  $P_0$  en la circunferencia. La solución queda expresada de esta

forma

$$u(x, y) = \ln\left(\frac{1}{R_0}\right) - \ln\left(\frac{1}{\hat{R}_0}\right) - \ln\left(\sqrt{\frac{1}{x_0^2}}\right)$$

Este argumento es también válido cuando las fuentes se encuentran colocadas sobre cualquier recta que pase por el origen. La primera fuente la colocamos en el punto  $(\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi))$ , con  $|\rho| < 1$ , y la segunda fuente, que corresponde a la imagen, está en el punto  $(\frac{1}{\rho} \cos(\phi), \frac{1}{\rho} \sin(\phi))$ . Es claro que la imagen está fuera del círculo unitario y que además está sobre la recta que parte del origen y que pasa por la primera fuente. De esta forma las distancias a cualquier punto  $P = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$  dentro del círculo (con  $|r| < 1$ ) quedan escritas como

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(\rho \cos(\phi) - r \cos(\theta))^2 + (\rho \sin(\phi) - r \sin(\theta))^2} \\ \hat{R} &= \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \cos(\phi) - r \cos(\theta)\right)^2 + \left(\frac{1}{\rho} \sin(\phi) - r \sin(\theta)\right)^2} \end{aligned} \quad (4.10)$$

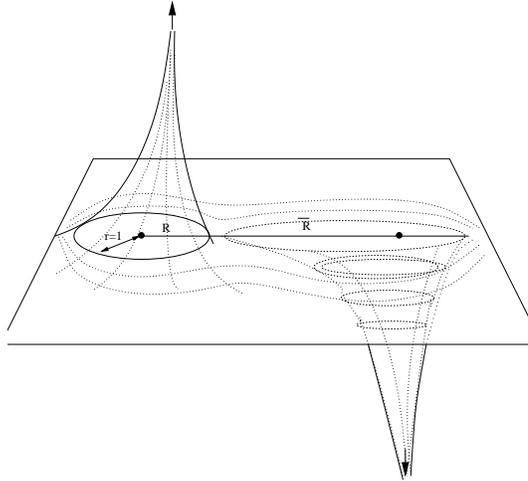


Fig. 4.5

La solución de nuestro problema está dado por la función de Green que la podemos representar como dos fuentes, una dentro del círculo unitario y otra fuera, que es

la imagen, que la podemos ver representada en la figura Fig. 4.5. Podemos entonces escribir esta función de Green de la siguiente forma,

$$G(r, \theta, \rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \ln\left(\rho \frac{\hat{R}}{R}\right) \quad (4.11)$$

donde las distancias las expresamos así

$$R = \sqrt{r^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi) + \rho^2} \quad , \quad \hat{R} = \sqrt{r^2 - 2\frac{r}{\rho} \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{\rho^2}} \quad .$$

El agregar la  $\rho$  dentro del logaritmo en la función de Green (4.11) es para asegurar que en la frontera el valor de  $u$  es cero.

De esta forma concluimos que la función de Green es la solución a la ecuación de Poisson (4.9), por lo tanto  $u(r, \theta) = G(r, \theta, \rho, \phi)$  cuando la fuente está en el punto  $(\rho \cos(\phi), \rho \sin(\phi))$ .

Finalmente, si sobre el círculo tuvieramos más de una fuente, digamos  $N$ , entonces la solución es similar sumando la función de Green de cada una de las fuentes,

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N G(r, \theta, \rho_i, \phi_i) \quad .$$

Si ahora tuvieramos una distribución continua de fuerzas o estirones que actúan sobre la membrana y que están moduladas por la función  $f(\rho, \phi)$ , la solución a este problema lo podemos expresar en términos de la función de Green:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} G(r, \theta, \rho, \phi) f(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi \quad .$$

El lector puede repetir este ejercicio para el caso tridimensional, cuando el dominio es una esfera de radio unitario. En el espacio, la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 u(x, y, z) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (4.12)$$

tiene como solución

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

En este caso las fuentes las podemos pensar como cargas eléctricas y  $u$  el potencial eléctrico.

## 4.4. Función de Green

En esta sección justificaremos la relación (4.6) en dos y tres dimensiones. A partir del Teorema de Gauss, determinaremos un conjunto de relaciones útiles conocidas como

las identidades de Green para finalmente mostrar cómo podemos expresar la solución de ecuaciones del tipo Laplace, Poisson o Helmholtz utilizando la función de Green apropiada.

Consideremos un dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , su frontera la denotamos como  $\partial\Omega$ . Tomemos una función vectorial  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  de clase  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ . El teorema de Gauss nos asegura que

$$\int \int \int_{\Omega} \nabla \cdot F d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} F \cdot d\bar{a} \quad , \quad (4.13)$$

donde  $d\bar{x}$  es el elemento de volumen y  $d\bar{a}$  es el vector normal a la superficie multiplicado por el elemento de área. Vamos a proponer que la función  $F$  se escriba en término de las funciones escalares  $u$  y  $v$ , las cuales están definidas en  $\Omega$  y son de clase  $\mathcal{C}^2(\Omega)$ .

$$F = \left( u \frac{\partial v}{\partial x}, u \frac{\partial v}{\partial y}, u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad .$$

Es claro entonces que bajo esta definición  $\nabla \cdot F = u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v$ . Entonces sustituyendo  $F$  en (4.13) tendremos el siguiente resultado:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 v + \nabla u \cdot \nabla v) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x} dx + u \frac{\partial v}{\partial y} dy + u \frac{\partial v}{\partial z} dz \quad . \quad (4.14)$$

Ahora definamos la función vectorial  $H$  utilizando las mismas funciones escalares  $u$  y  $v$ , la función  $H$  la escribimos de la siguiente forma:

$$H = \left( v \frac{\partial u}{\partial x}, v \frac{\partial u}{\partial y}, v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad .$$

Aplicando el Teorema de Gauss a la función  $H$ , se obtiene un resultado similar a (4.14),

$$\int \int \int_{\Omega} (v \nabla^2 u + \nabla u \cdot \nabla v) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} dx + v \frac{\partial u}{\partial y} dy + v \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (4.15)$$

Restando (4.14) de (4.15) obtenemos la relación conocida como la segunda identidad de Green:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\bar{a} \quad , \quad (4.16)$$

donde  $\frac{\partial v}{\partial n}$  y  $\frac{\partial u}{\partial n}$  son las derivadas parciales de  $v$  y  $u$  respecto al vector normal de la superficie  $\partial\Omega$ .

La identidad de Green (4.16) es válida para cualquier dimensión del dominio  $\Omega$  que tomemos, sin embargo para el caso bidimensional, utilizamos el teorema de Green, de

esta forma, dada dos funciones  $u$  y  $v$  definidas en un dominio cerrado  $S$  cuya frontera sea la curva  $C$ , se obtiene un resultado similar a la segunda identidad de Green. El lector puede repetir los cálculos para el caso bidimensional y obtener el siguiente resultado

$$\int \int_S (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) ds = \int_C \left( u \frac{\partial u}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (4.17)$$

donde  $ds$  es el elemento de área y  $d\sigma$  es la longitud de arco sobre la curva.

Ahora discutiremos sobre el tipo de funciones que son interesantes utilizar en la segunda identidad de Green. Tomemos a  $v(\bar{x})$ , con  $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ , como la siguiente función:

$$v = \frac{1}{R(\bar{x}, \bar{x}_0)} = \frac{1}{4\pi \|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \quad (4.18)$$

Se puede mostrar que  $v(\bar{x})$  cumple con la ecuación de Laplace,  $\nabla^2 v(\bar{x}) = 0$  si  $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ , esto lo puede comprobar el lector como un ejercicio.

Ahora mostraremos cómo podemos expresar la función  $u(\bar{x})$  en términos de la función  $\bar{v}(x)$ .

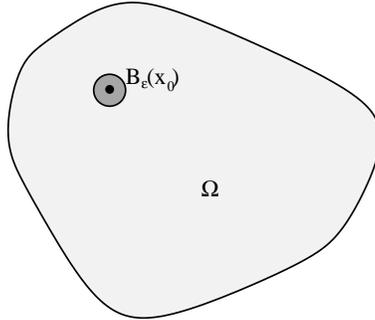


Fig. 4.6

Consideremos el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  y un punto  $\bar{x}_0$  en el interior de  $\Omega$ . Sea  $B_\epsilon(\bar{x}_0)$  una bola de radio  $\epsilon$  con centro en  $\bar{x}_0$  tal como se ve en la figura (Fig. 4.6). Apliquemos la segunda identidad de Green (4.16) en el dominio  $\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)$  donde la función  $v$  la tomamos como la definimos en (4.18). Cabe aclarar que en este caso tenemos dos fronteras de  $\Omega$ : la frontera exterior  $\partial\Omega$  y la interior que es  $\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)$ :

$$\begin{aligned} & \int \int \int_{\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)} \left( u \nabla^2 \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \nabla^2 u \right) d\bar{x} = \\ & \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) da - \int \int_{\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \eta} u \right) da \end{aligned} \quad (4.19)$$

Suponiendo  $|\epsilon|$  pequeña, entonces  $\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{1}{R})$  evaluada en la frontera  $\partial B_\epsilon(\bar{x}_0)$  toma el siguiente valor:

$$\frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{1}{R}) = \frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{R}) \Big|_{r=\epsilon} = \frac{1}{\epsilon^2}$$

De esta manera, podemos evaluar la tercera integral de (4.19) de la siguiente forma:

$$\int \int_{\partial B_\epsilon} u \frac{\partial}{\partial \eta}(\frac{1}{R}) da = \frac{1}{\epsilon^2} \int \int_{\partial B_\epsilon} u da = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} \langle u \rangle = 4\pi \langle u \rangle$$

donde  $\langle u \rangle$  representa el valor promedio de  $u$  en la bola  $B_\epsilon(x_0)$ . Así también, el término  $\frac{1}{R}$  es igual a  $\frac{1}{\epsilon}$  en la frontera de  $\partial B_\epsilon$ , por lo tanto:

$$\int \int_{\partial B_\epsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \eta} da = \frac{1}{\epsilon} \int \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial u}{\partial \eta} da = 4\pi\epsilon \left\langle \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\rangle$$

En el límite, cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , la expresión anterior se hace nula porque  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  es finita en  $\Omega$ . Además,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle u \rangle = u(\bar{x}_0)$ . Recordando que  $\nabla^2(\frac{1}{R}) = 0$  en  $\Omega - B_\epsilon(\bar{x}_0)$ , entonces la segunda identidad de Green (4.19) queda escrita, reordenando los términos, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 4\pi u(\bar{x}_0) = & - \int \int_{\partial \Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R(x, x_0)} \right) - \frac{1}{R(x, x_0)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) da \\ & - \int \int \int_{\Omega} \frac{\nabla^2 u}{R(\bar{x} - \bar{x}_0)} d\bar{x} \quad . \end{aligned} \quad (4.20)$$

Para interpretar esta última expresión consideremos que la función  $u$  cumple la ecuación de Laplace o de Poisson en el dominio  $\Omega$ :

$$\nabla^2 u = 0 \quad \text{o} \quad \nabla^2 u = f(\bar{x})$$

La expresión (4.20) nos da el valor de  $u(\bar{x})$  en el punto  $\bar{x}_0$  de manera explícita cuando tenemos una ecuación diferencial parcial de  $u$  donde esté involucrado el laplaciano de  $u$ . Esta situación la tenemos en la ecuación de Laplace (donde la segunda integral desaparece) o la ecuación de Poisson, donde el laplaciano se substituye por  $f(\bar{x})$ . En estos dos casos no aparece la función  $u(x)$  explícitamente en la segunda integral y podemos evaluarla en todo el dominio. De esta forma,  $u(\bar{x}_0)$  solo depende del valor de  $u$  y de su derivada normal en la frontera de  $\Omega$ .

El lector puede verificar que si el punto  $\bar{x}_0$  pertenece a la frontera de  $\Omega$ , entonces la expresión de la segunda identidad de Green solo se ve alterada por el cambio del factor  $4\pi$  a  $2\pi$  en el primer término de la expresión.

El caso bidimensional es completamente similar al caso en tres dimensiones, recordando que la función (4.5) es solución de (4.4), así reemplazamos la función  $v$  por  $\frac{1}{2\pi} \ln(1/R)$ . Ahora, siguiendo el mismo procedimiento que en tres dimensiones se obtiene el siguiente resultado:

$$2\pi u(\bar{x}_0) = \int_C \left[ \ln \left( \frac{1}{R} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \ln \left( \frac{1}{R} \right) \right) \right] d\sigma \\ - \int \int_S (\nabla^2 u) \ln \left( \frac{1}{R} \right) ds \quad .$$

### 4.5. Funciones de Green para fronteras particulares

Consideremos en el caso tridimensional cuando la función  $u(\bar{x})$  cumple con la ecuación de Laplace en  $\Omega$ , entonces

$$4\pi u(\bar{x}_0) = - \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{R(x, x_0)} \right) - \frac{1}{R(x, x_0)} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) da \quad .$$

De esta forma, tenemos la solución de  $u$  en cualquier punto de  $\Omega$  si conocemos el valor de  $u$  y de  $\frac{\partial u}{\partial \eta}$  en la frontera de  $\Omega$ . En la gran mayoría de los casos, solo disponemos del valor de  $u$  en la frontera (condiciones tipo Dirichlet) o el valor de  $\frac{\partial u}{\partial n}$  (condiciones tipo Neumann). ¿Cómo podemos aplicar entonces esta fórmula de Green? La respuesta está en utilizar una función de Green algo más general que  $1/R(\bar{x}, \bar{x}_0)$  en nuestra expresión. Así podemos lograr que el valor de esta función de Green se anule en la frontera de  $\Omega$ , o bien que el valor de su derivada normal sobre la frontera de  $\Omega$  se anule. De esta forma solo necesitaremos conocer  $u$  o  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en la frontera de  $\Omega$ .

Para esto tomemos la expresión de la segunda identidad de Green (4.16) aplicada a las funciones  $u(\bar{x})$  y  $w(\bar{x})$ . Un punto importante es que pedimos que la función  $w(\bar{x})$  cumpla con la ecuación de Laplace en el dominio  $\Omega$ , esto quiere decir que  $w(\bar{x})$  tenga sus singularidades fuera del dominio  $\Omega$ . Así tenemos:

$$\int \int \int_{\Omega} (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) d\bar{x} = \int \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial w}{\partial n} - w \frac{\partial u}{\partial n} \right) da \quad (4.21)$$

En esta última ecuación tenemos que  $\nabla^2 w = 0$  en todo  $\Omega$ . Sumemos esta expresión (4.21) con la identidad de Green obtenida en (4.20). De esta manera, la identidad de Green queda transformada en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
u(\bar{x}_0) = & - \iint_{\partial\Omega} \left[ \left( \frac{1}{4\pi R(x, x_0)} + w \right) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} + w \right) \right] da \\
& - \iiint_{\Omega} \nabla^2 u \left( \frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} + w \right) d\bar{x} \quad .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nombremos a  $\frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)} + w$  como la función de Green, la cual la denotamos como  $G(\bar{x}, \bar{x}_0)$ . La razón de añadir la función  $w$  en  $G$  es para lograr eliminar uno de los términos en la integral de superficie, de esta forma solo necesitamos saber el valor de  $u$ , o bien el valor de su derivada  $\frac{\partial u}{\partial n}$  en la frontera. Ahora debemos seleccionar a la función  $w$  que cumpla con las siguientes condiciones

1.  $\nabla^2 w = 0$  en  $\Omega$ . La función puede tener singularidades fuera de  $\Omega$ .
2.  $\frac{1}{4\pi R(x, x_0)} + w = 0$  en  $\partial\Omega$ . O bien
3.  $\frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{4\pi R(x, x_0)} + w \right) = 0$  en  $\partial\Omega$ .

Así tendremos las dos expresiones bien conocidas de la función de Green para determinar la solución de  $u$  en el dominio  $\Omega$  con condiciones de frontera tipo Neumann:

$$u(\bar{x}_0) = \iint_{\partial\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) \frac{\partial u}{\partial n} da - \iiint_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u d\bar{x}$$

y para el caso de Dirichlet:

$$u(\bar{x}_0) = - \iint_{\partial\Omega} u \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{x}, \bar{x}_0) da - \iiint_{\Omega} G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u d\bar{x} \quad .$$

En el caso bidimensional podemos proceder de manera similar al caso en tres dimensiones, el resultado que se obtiene es el siguiente. Para condiciones de Neumann

$$\bar{u}(\bar{x}) = \int_C G(\bar{x}, \bar{x}_0) \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma - \iint_S G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u dS \tag{4.23}$$

y con condiciones de Dirichlet:

$$\bar{u}(\bar{x}) = - \int_C u \frac{\partial}{\partial n} G(\bar{x}, \bar{x}_0) d\sigma - \iint_S G(\bar{x}, \bar{x}_0) \nabla^2 u dS \quad .$$

En ambos casos, la función de Green está definida de la siguiente forma:

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{R(\bar{x}, \bar{x}_0)} \right) + w$$

¿Cómo podemos entonces determinar la función  $w$  que se adecue a nuestro problema?

En el caso que tengamos condiciones de Dirichlet, la función  $w$  debe tener el mismo valor que  $\frac{1}{4\pi R(\bar{x}, \bar{x}_0)}$  en la frontera. Para lograr este hecho, podemos aprovechar el método de imágenes que se vió en la sección anterior.

Tomemos un ejemplo en tres dimensiones. Sea  $\Omega$  la esfera de radio 1 y queremos resolver el problema siguiente

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 0 & \text{en } \Omega, \\ u &= f(\bar{x}) & \text{en } \partial\Omega \text{ donde } \bar{x} \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Lo primero es determinar la función de Green que se adecue mejor a nuestro problema. Proponemos a la función  $w$  como la imagen de la fuente colocada en  $\bar{x}_0 \in \Omega$ . Es claro que el punto imagen debe estar fuera del dominio  $\Omega$  para que  $w$  cumpla con la ecuación de Laplace en dicha región  $\Omega$ . Usando la simetría radial del problema, el punto imagen debe estar sobre la línea recta que une al origen con la fuente en  $\bar{x}_0$  tal como se ve en la figura Fig. 4.7. Si la fuente  $\bar{x}_0$  está a una distancia  $\rho$  del origen, entonces el punto imagen debe estar a una distancia  $1/\rho$  respecto al origen. El lector puede comprobar que con esta configuración, la función de Green definida como:

$$G(x, \bar{x}_0) = \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}_0|} - \frac{1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}'_0|},$$

se anula en la frontera de la esfera. En este caso la función  $w$  corresponde a la acción de la carga imagen  $\frac{-1}{4\pi|\bar{x} - \bar{x}'_0|}$  donde  $\bar{x}'_0$  es un punto que esta sobre la recta que parte del origen y pasa por  $\bar{x}_0$  y está a la distancia  $\frac{1}{\rho}$  del origen. Esta función cumple con la ecuación de Laplace en  $\Omega$  puesto que  $\bar{x}'_0$  está fuera de  $\Omega$ .

Otro ejemplo es cuando  $\Omega$  corresponde a un cilindro de radio 1 tal como lo vemos en la figura Fig. 4.8. La simetría del problema nos permite reducirlo a un caso bidimensional. Usamos la función de Green definida al final de la sección dedicada al método de imágenes para el caso de un dominio circular de radio 1. La función es entonces

$$G(\bar{x}, \bar{x}_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}_0|} \right) - \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{|\bar{x} - \bar{x}'_0|} \right)$$

siendo  $\bar{x}'_0$  el punto imagen tal como se ve en la figura Fig. 4.8 y que está sobre el mismo plano donde se encuentran los puntos  $\bar{x}$  y  $\bar{x}_0$ , este plano es el plano normal al eje del cilindro. La distancia de punto  $\bar{x}'_0$  al eje del cilindro es el inverso de la distancia del punto  $\bar{x}$  a este mismo eje. En este caso, la función  $w$  corresponde al punto imagen colocado en el punto  $\bar{x}'_0$ .

De esta forma vemos que el método de imágenes es una forma práctica de encontrar la función de Green que se adecue al problema de la ecuación de Laplace o Poisson que se esté buscando. Una mayor explicación sobre el uso de la función de Green y su aplicación a otras ecuaciones como al de Helmholtz la podemos encontrar en las referencias (Tyn Myint-u) y (Tijonov y Samarsky).

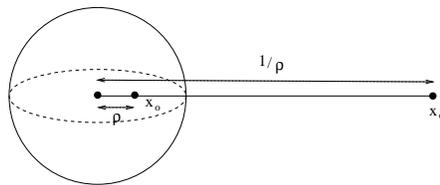


Fig. 4.7

#### 4.5.1. Fórmula de Green y de Poisson

Algo que el lector debe haber notado de la sección anterior es que hemos dado una solución al problema de la ecuación de Laplace dentro de un círculo unitario distinta a la que obtuvimos en el capítulo 3 y que llamamos la fórmula de Poisson (3.40). Parecería inconsistente que existieran dos soluciones diferentes a un mismo problema de la ecuación de Laplace. Lo que vamos a mostrar en esta subsección es que ambas soluciones son la misma.

Comencemos escribiendo la función de Green para la circunferencia unitaria en el plano,

$$\begin{aligned}
 G(\bar{x}, \bar{x}_0) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) - \ln \left( \frac{\|\bar{x}_0\|}{\|\bar{x} - \bar{x}_1\|} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|} \right) - \ln \left( \frac{1}{\|\bar{x} - \bar{x}_1\|} \right) - \ln(\|\bar{x}_0\|) \right]
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

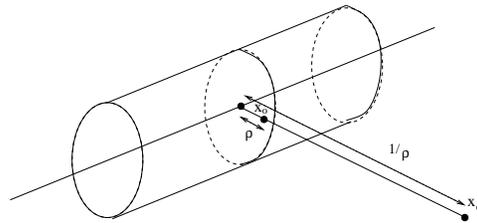


Fig. 4.8

Es práctico describir esta última ecuación en coordenadas polares, de tal forma que

$$\begin{aligned} \|\bar{x} - \bar{x}_0\| &= \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi)} \\ \|\bar{x} - \bar{x}_1\| &= \sqrt{r^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{r}{\rho} \cos(\theta - \phi)} \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde las coordenadas de  $\bar{x}$  son  $(r, \theta)$ , las de  $\bar{x}_0$  son  $(\rho, \phi)$  y las de  $\bar{x}_1$  son  $(\frac{1}{\rho}, \phi)$ , es claro que los puntos  $\bar{x}_0$  y  $\bar{x}_1$  están sobre una línea recta que parte del origen.

Ahora calculemos la derivada normal de  $G$ , por la simetría del problema la derivada

normal corresponde a la derivada radial de  $\bar{x}$ . Así obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{G}{\partial r} &= \frac{1}{2\pi} \left[ -\frac{1}{2} \frac{2r - 2\rho \cos(\theta - \phi)}{\|\bar{x} - \bar{x}_0\|^2} + \frac{1}{2} \frac{2r - \frac{2}{\rho} \cos(\theta - \phi)}{\|\bar{x} - \bar{x}_1\|^2} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{r - \rho \cos(\theta - \phi)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \phi)} - \frac{r - \frac{1}{\rho} \cos(\theta - \phi)}{r^2 + \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{r}{\rho} \cos(\theta - \phi)} \right] \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ahora evaluemos la derivada normal en la frontera,

$$\begin{aligned} \left. \frac{G}{\partial r} \right|_{r=1} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \rho \cos(\theta - \phi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \phi)} - \frac{1 - \frac{1}{\rho} \cos(\theta - \phi)}{1 + \frac{1}{\rho^2} - 2\frac{1}{\rho} \cos(\theta - \phi)} \right] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \phi)} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Si ahora sustituimos la función de Green en la ecuación (4.23), obtenemos la siguiente expresión

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\theta - \phi)} f(\phi) d\phi$$

que es exactamente la fórmula de Poisson (3.40) obtenida en el capítulo 3.

## 4.6. Fórmula de Green para la ecuación de Helmholtz

Un último comentario sobre la función de Green aplicada a otro tipo de ecuaciones distintas a la de Laplace o Poisson. Veamos el caso de la ecuación de Helmholtz, el cual se escribe de esta forma:

$$\nabla^2 u(\bar{x}) + k^2 u(\bar{x}) = h(\bar{x}) \quad \text{con } \bar{x} \in \Omega \quad . \quad (4.28)$$

con  $k$  una constante.

En principio no podemos utilizar las identidades de Green directamente a la ecuación de Helmholtz, pero podemos hacer unos cambios a dichas identidades tal que se puedan utilizar para encontrar una solución a la ecuación (4.28). Escribamos la primera identidad de Green:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 v - v \nabla^2 u) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \cdot da \quad (4.29)$$

donde  $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Ahora sumemos  $\pm k^2 u v$ , que es un cero, a la primera integral de la identidad de Green,

$$\int_{\Omega} (u(\nabla^2 v + k^2 v) - v(\nabla^2 u + k^2 u)) dx = \int_{\partial\Omega} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) \cdot da \quad (4.30)$$

Esta última ecuación ya se puede adaptar para encontrar solución a (4.28), donde podemos seguir el mismo procedimiento que hicimos para encontrar la solución de la ecuación de Poisson. Para ello debemos determinar una solución al problema de Helmholtz con una función singular en la parte derecha,

$$\nabla^2 u(\bar{x}) + k^2 u(\bar{x}) = \delta(\bar{x} - \bar{x}_0) \quad \text{con } \bar{x} \in \Omega \quad . \quad (4.31)$$

En  $\mathbb{R}^3$ , una solución a esta ecuación singular de Helmholtz es

$$u(\bar{x}, \bar{x}_0) = \frac{c_1 e^{ik\rho} + c_2 e^{-ik\rho}}{\rho} \quad (4.32)$$

donde  $\rho = \|\bar{x} - \bar{x}_0\|$ . Queda como ejercicio al lector comprobar que efectivamente es solución de (4.31) para  $\bar{x} \neq \bar{x}_0$ , para ello debe escribirse dicha ecuación en coordenadas esféricas dada la simetría del problema.

Finalmente con estas funciones de Green,  $G(\bar{x}, \bar{x}_0) = u(\bar{x}, \bar{x}_0)$ , es posible resolver la ecuación de Helmholtz para las mismas geometrías en la que hemos aplicado las ecuaciones de Laplace y Poisson utilizando este formalismo de Green.

## Capítulo 5

# Separación de variables para ecuaciones con características

En esta sección analizaremos algunos problemas ya resueltos en las secciones anteriores, usando la técnica de separación de variables que ya motivamos y discutimos para ecuaciones elípticas. La idea del método es reducir el problema a resolver un sistema infinito de ecuaciones ordinarias independientes. Discutiremos la técnica con varios ejemplos y compararemos la solución obtenida por características.

### 5.1. Separación de variables para la ecuación de segundo orden

Empecemos por resolver el problema

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, t \geq 0, \\u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

La solución del problema anterior ya se dio en (1.81). Ahora resolveremos el problema separando variables.

Sabemos que cualquier función impar  $g(x)$  (suficientemente regular) se puede desarrollar en el intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ , en serie de Fourier de senos de la forma

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \sin(nx) \left\{ \int_0^{\pi} \sin(n\xi) g(\xi) d\xi \right\}.\tag{5.2}$$

En particular, la solución buscada la suponemos impar y la podemos escribir como

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin(nx), \quad A_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\xi) u(\xi, t) d\xi, \quad (5.3)$$

donde los  $A_n(t)$  son desde luego desconocidos y los vamos a determinar usando las condiciones del problema planteado en esta sección, de manera tal que (5.3) sea efectivamente una solución (cuando menos formal).

Para determinar los  $A_n(t)$  sustituimos (5.3) en el problema (5.1) donde aprovechamos la ortogonalidad de las funciones  $\sin(n\xi)$ , para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n''(t) + n^2 A_n(t)) \sin(nx) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad t \geq 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(0) \sin(nx) = u_t(x, 0) &= 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(nx) = u(x, 0) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin(nx), \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin(n\xi) d\xi.$$

De (5.4) se tiene el sistema infinito de ecuaciones independientes

$$\begin{aligned} A_n''(t) + n^2 A_n(t) &= 0, \quad t \geq 0, \quad n = 1, 2, \dots \\ A_n'(0) &= 0, \quad A_n(0) = f_n. \end{aligned} \quad (5.5)$$

La solución de (5.5) es de la forma  $A_n(t) = f_n \cos(nt)$ .

Nótese que precisamente las dos condiciones iniciales sobre  $u$  y  $u_t$  son las que nos dan una solución única para las ecuaciones ordinarias (5.5). La solución formal del problema que se planteó originalmente es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos(nt) \sin(nx) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin[n(x+t)] + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin[n(x-t)]. \quad (5.6)$$

Desde luego que si la convergencia de esta serie es lo suficientemente fuerte, la expresión (5.6) no es sólo una solución formal, sino que es la solución del problema.

Supongamos que la función  $f$  es infinitamente diferenciable y  $f = 0$  para  $0 < a \leq x \leq b < \pi$ , entonces probaremos que (5.6) es efectivamente la solución del problema, es decir, que (5.6) es convergente. De (5.1) vemos que las  $f_n$  pueden expresarse de la

siguiente forma haciendo dos veces la integración por partes aprovechado que  $f = 0$  en los extremos:

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi = -\frac{2}{n^2\pi} \int_0^\pi f''(\xi) \operatorname{sen}(n\xi) d\xi \quad (5.7)$$

Pero al ser  $f$  infinitamente diferenciable entonces sabemos que  $f''(x)$  es acotada en el intervalo, es decir,  $|f''(x)| \leq K$  para  $0 \leq x \leq \pi$ , por la tanto al substituir  $f''$  por su cota, obtenemos que  $|f(x)| \leq \frac{2K}{n^2}$ . Así al estimar la norma de  $u(x, t)$  en (5.6) obtenemos que

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \operatorname{sen}(n(x \pm t)) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2K}{n^2} < \infty$$

lo cual nos indica que la solución es convergente.

Ahora estudiaremos la solución que obtuvimos para hacer ver que (5.6) no es más que otra representación de la solución del problema (1.81). Notemos que dicha solución tiene la forma de dos ondas que viajan en direcciones opuestas. Sabemos además que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\xi = w(\xi)$$

es la extensión impar periódica de período  $2\pi$  de  $f$ . Esto se ve en la Fig. 5.1 En

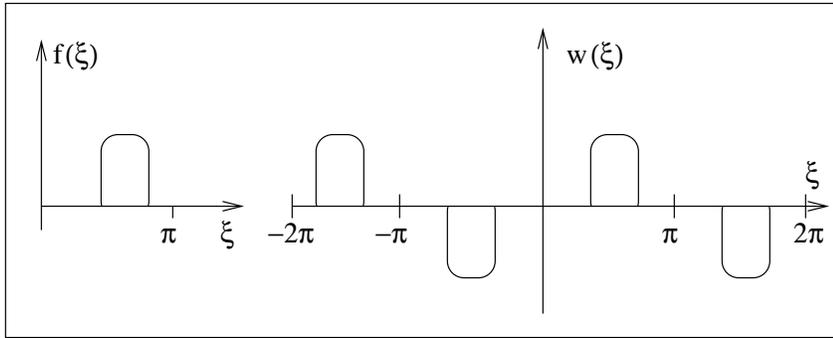


Fig. 5.1

términos de la función  $w$ , (5.6) se escribe como

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{w(x + t) + w(x - t)\}. \quad (5.8)$$

En el plano  $(x, t)$  vemos que  $u(x, t)$  es el promedio de los valores de  $w$  que aparecen en la Fig. 5.2, es decir,

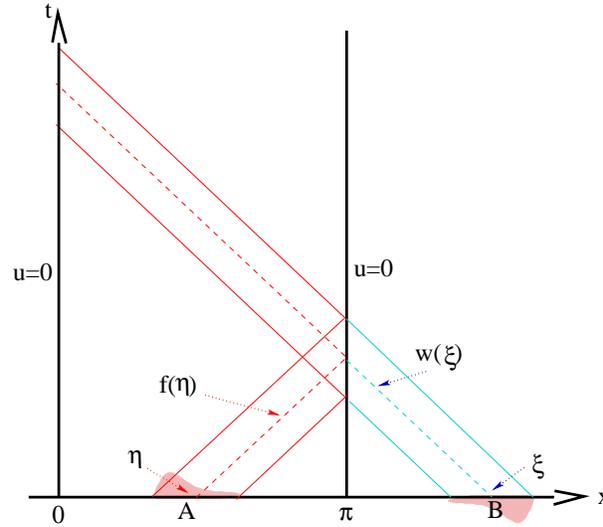


Fig. 5.2

$$u(x, t) = \frac{1}{2}w(A) + \frac{1}{2}w(B) = \frac{1}{2}w(\xi) = -\frac{1}{2}f(\eta)$$

donde  $\xi$  es el punto colocado simétricamente con respecto a  $\eta$  de  $\pi$ . Este es el mismo resultado que obtuvimos para el problema (1.81) con características. Vemos que el problema de reflexión con dos paredes es equivalente al problema con valores iniciales para una condición inicial que es periódica, de forma tal que las paredes siempre sean nodos de las ondas emitidas por esa condición inicial. Esto es lo que en física se conoce como el método de las imágenes tal como lo mostramos en el capítulo 1, y la expresión cuantitativa de la posición e intensidad de las imágenes de  $f(x)$  está dada por la serie (5.6).

Queda ahora como ejercicio resolver por separación de variables los problemas:

- Problema con condiciones iniciales en la velocidad:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= 0 & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & -\infty < x < \infty, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

- Problema de la cuerda acotada con forzamiento:

$$\begin{aligned} u_{tt} + \sin x \sin t &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

¿Qué sucede con la solución del segundo problema cuando  $t \rightarrow \infty$ .

- Problema de la onda amortiguada:

$$\begin{aligned} u_{tt} + u_t &= u_{xx}, & 0 \leq x \leq \pi, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_t(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

¿Qué pasa con las soluciones cuando  $t \rightarrow \infty$ ?

Estudiaremos ahora el problema para una cuerda infinita. La solución ya se obtuvo usando la fórmula de D'Alembert. Obtendremos ahora esta fórmula usando separación de variables. El problema por resolver es:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x) &= 0, & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= g(x), & -\infty < x < \infty. \end{aligned} \tag{5.9}$$

En el caso finito expresamos  $u$  en términos de su serie de Fourier. Para el problema (5.9) hacemos lo mismo pero por tratarse de un intervalo infinito usaremos la transformada de Fourier. Es decir, expresaremos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(t, k) e^{-ikx} dk, \quad A(t, k) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, t) e^{ik\xi} d\xi.$$

Procederemos de manera similar a como se hizo en (5.4) y en (5.5) pero ahora aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier respecto a la derivación. Así veremos que  $A(t, k)$  satisface

$$\begin{aligned} A''(t, k) + k^2 A(t, k) &= 0, & -\infty < k < \infty, & t \geq 0, \\ A(0, k) &= 0, & A'(0, k) &= \hat{g}(k). \end{aligned} \tag{5.10}$$

donde

$$\hat{g}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{ik\xi} d\xi$$

La solución de (5.10) está dada por  $A(t, k) = \hat{g}(k) \frac{\sin kt}{k}$ , y finalmente la solución formal es

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{-ikx} \frac{\sin kt}{k} dk. \quad (5.11)$$

Si  $g(x)$  es infinitamente diferenciable y diferente de cero sólo en un intervalo finito, entonces se puede verificar que (5.11) es efectivamente la solución de (5.9). Esto se hace probando que se pueden intercambiar derivadas e integrales en (5.11) de la siguiente manera, si sustituimos a  $\hat{g}(k)$  dentro de la integral obtenemos

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \right) e^{-ikx} \frac{\sin kt}{k} dk$$

Al intercambiar el orden de integración y escribir la función seno en su forma exponencial, obtenemos

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x-\xi)} \left\{ \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2ik} \right\} dk \right) g(\xi) d\xi \quad (5.12)$$

La unicidad nos dice pues que (5.12) no es más que otra alternativa para expresar la fórmula de D'Álambert, sin embargo es conveniente evaluarla para obtener así la fórmula deseada. Para lo anterior, recordemos que la transformada inversa del producto es la convolución de las transformadas inversas (ver Apéndice). La ecuación (5.12) la podemos entonces escribir como

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x - \xi, t) g(\xi) d\xi$$

donde la función  $G(\eta, t)$  la identificamos con la función de Green del problema, y está dada por

$$G(\eta, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ik(\eta-t)} - e^{-ik(\eta+t)}}{k} dk. \quad (5.13)$$

Una manera de entender la función de Green (5.13) es pensar en dos onda planas ( $e^{-ik(n\pm t)}$ ) o bién en dos curvas características que se propagan en direcciones opuestas pero que propagan la función de Green que estudiamos en el capítulo 4 en el espacio, es decir,  $G(x, x') = \frac{1}{\|x-x'\|}$ . Para calcular la integral (5.13) vemos que el integrando es una función analítica, ya que  $k = 0$  es un punto regular. Debido a esto se puede

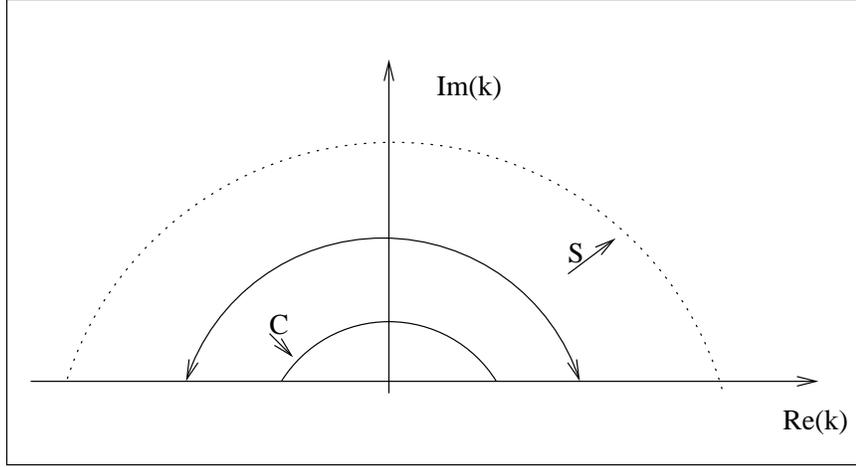


Fig. 5.3

reemplazar la integral a lo largo del eje real por la suma de integrales a lo largo del contorno  $C$ , tal y como se indica en la Fig. 5.3.

Obtenemos entonces que

$$G(\eta, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{-ik(\eta+t)}}{k} dk - \frac{1}{4\pi i} \int_C \frac{e^{-ik(\eta-t)}}{k} dk \quad (5.14)$$

Para calcular (5.14) observemos que para  $\eta + t < 0$ , entonces  $\eta - t < 0$  y en este caso los integrandos decaen exponencialmente a cero para  $\text{Im}\{k\} > 0$  y el uso del lema de Jordan sobre el contorno  $S$  nos da  $G(\eta, t) = 0$ ,  $\eta < -t$ . Supongamos ahora que  $\eta + t > 0$ . En este caso hay dos posibilidades; la primera  $\eta - t < 0$  y la segunda  $\eta - t > 0$ . Cuando  $\eta + t > 0$  y  $\eta - t < 0$ , cerramos el contorno de la primer integral en  $\text{Im}\{k\} < 0$  y el de la segunda en  $\text{Im}\{k\} > 0$ . Obtenemos  $G(\eta, t) = \frac{1}{2}$ ,  $-t < \eta < t$ . Finalmente si  $\eta + t > 0$  y  $\eta - t > 0$  cerramos en  $\text{Im}\{k\} < 0$  y obtenemos que  $G(\eta, t) = 0$  para  $t < \eta$ . Resumiendo tenemos que

$$G(\eta, t) = \begin{cases} 0, & \eta < -t, \\ \frac{1}{2}, & -t < \eta < t, \\ 0, & t < \eta. \end{cases} \quad (5.15)$$

Usando (5.15) obtenemos que

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(\eta, t) g(x - \eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(x - \eta) d\eta = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds$$

que es precisamente la fórmula de D'Álambert.

Es de importancia notar que las integrales que definen a  $G(\eta, t)$  cambian en forma discontinua y las continuidades se dan sólo en las características. Esta situación se presenta siempre que se resuelven los problemas con características mediante transformadas.

Queda como ejercicio resolver, usando la transformada de Fourier, el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) &= 0, & -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Muestre también, usando la transformada de Fourier, que en el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - u, & -\infty < x < \infty, t \geq 0, \\ u(x, 0) &= f(x), & f(x) = 0, |x| > a, \\ u_t(x, 0) &= 0, \end{aligned}$$

la primera señal que llega al punto  $x_0$  es aquella que sale de  $\infty$  y tarda un tiempo  $t = x_0 - a$ . Encuentre el mismo resultado usando las características.

## 5.2. Separación de variables para un sistema de ecuaciones

En el caso de sistemas, la técnica es la misma que para una sola ecuación, y sólo hay que tener cuidado con los vectores. Resolveremos únicamente un ejemplo en detalle que ya se dejó como ejercicio para resolver mediante características. El problema que proponemos resolver es:

$$\begin{aligned} i_x + c v_t &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \\ v_x + L i_t &= 0 \\ v(x, 0) &= f(x) \\ i(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Este sistema de ecuaciones es similar al problema de la línea de transmisión que se estudió en el capítulo 2. Cuando el sistema lo escribimos en forma matricial, este queda escrito así:

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 0 & c^{-1} \\ L^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0,$$

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Resolveremos (5.17) introduciendo las transformadas de Fourier  $\hat{i}$  y  $\hat{v}$ , para obtener con ello (quedando como ejercicio el verificar los detalles),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}_t &= \begin{pmatrix} 0 & ikc^{-1} \\ ikL^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}, \quad -\infty < k < \infty, \quad t \geq 0, \\ \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix}_{t=0} &= \begin{pmatrix} \hat{f}(k) \\ \hat{g}(k) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

La ecuación (5.18) es un sistema de ecuaciones ordinarias (y no una sola ecuación como en el caso de la ecuación de onda). Esta es la diferencia con el caso de una sola ecuación. El sistema se resuelve de la manera habitual, diagonalizando la matriz del sistema que es lo mismo que se hace al proceder por características; así tenemos que la solución de (5.18) es

$$\begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} e^{ikt/\sqrt{LC}} & 0 \\ 0 & e^{-ikt/\sqrt{LC}} \end{pmatrix} U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

donde  $U$  es la matriz calculada en (2.8). Para encontrar  $v, i$  debemos invertir (5.19). Esto se hace de manera más sencilla introduciendo las variables

$$\begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

y obteniendo

$$U^{-1} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikt/\sqrt{LC}} & 0 \\ 0 & e^{-ikt/\sqrt{LC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{w} \\ \hat{z} \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que

$$\begin{pmatrix} v \\ i \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} w(x - t/\sqrt{LC}) \\ z(x + t/\sqrt{LC}) \end{pmatrix}$$

es la solución del problema. Si queremos que las ondas no se propagen hacia la izquierda, debemos escoger  $f$  y  $g$  de tal manera que  $z = 0$ . Esto se logra si  $g = -\sqrt{\frac{C}{L}} f$ . Esta última ecuación se obtiene de (5.20) y de (2.10).

### 5.3. La transformada de Laplace

Al separar variables, el problema de resolver una ecuación diferencial parcial se transforma en resolver un sistema infinito de ecuaciones ordinarias para funciones que

dependen del tiempo. Se resuelven dichas ecuaciones y luego se suma la serie o se invierte la transformada obteniéndose así la solución buscada.

Al resolver problemas puede procederse de una manera alternativa transformando la variable tiempo (al igual que en ecuaciones ordinarias para transformarlas en ecuaciones algebraicas) y obtener una ecuación diferencial ordinaria para la función transformada. Posteriormente se resuelve esta ecuación, y se invierte la transformada para obtener la solución buscada. Una descripción detallada, así como ejemplos de esta técnica se encuentran en el libro de Weinberger [15]. Un tratamiento más avanzado se desarrolla en los libros de Courant-Hilbert [3] y de Van der Pol y Bremmer [14]. Nosotros nos limitaremos a usar la técnica en situaciones ya conocidas.

Empecemos por discutir el problema de los coches que entran por la carretera. Este problema quedó resuelto en (1.11). Recordemos que la ecuación, las condiciones iniciales y de frontera son

$$\begin{aligned}\rho_t + c\rho_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ \rho(x, 0) &= 0, & t \geq 0, \\ \rho(0, t) &= g(t), & x \geq 0.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Tomando la transformada de Laplace (ver Apéndice) de la (5.21), tendremos que ésta satisface

$$\begin{aligned}s\tilde{\rho}(x, s) + c\tilde{\rho}_x(x, s) &= 0, & x \geq 0, \\ \tilde{\rho}(0, s) &= \tilde{g}(s).\end{aligned}\tag{5.22}$$

Vemos que la transformada de Laplace ha convertido (5.21) en una familia de ecuaciones ordinarias que dependen del parámetro  $s$ . La solución de (5.22) es

$$\tilde{\rho}(x, s) = \tilde{g}(s)e^{-\frac{s}{c}x}, \quad x \geq 0,\tag{5.23}$$

que cuando  $Re\{s\} > 0$  decae a cero, y es efectivamente una transformada de Laplace. En el caso que la solución de (5.22) no decayera a cero cuando  $Re\{s\} \rightarrow \infty$ , entonces tendríamos una inconsistencia ya que estamos suponiendo que  $\rho$  tiene una transformada de Laplace. En dicho caso la conclusión es que  $\rho$  no tiene transformada de Laplace, y por lo tanto debe emplearse otra técnica para resolver (5.21). Sin embargo esto nunca ocurre en la práctica. La solución de (5.21), obtenida usando la fórmula de inversión para (5.23), es

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_B \tilde{g}(s)e^{s(t-\frac{x}{c})} ds.\tag{5.24}$$

Antes de calcular (5.24) notemos que para un punto fijo,  $\rho(x_0, t) = 0$  si  $t < \frac{x_0}{c}$  ya que en este caso el integrando decae exponencialmente para  $Re\{s\} > 0$ , y como  $\tilde{g}(s)$  es analítica, el lema de Jordan nos da como resultado que  $\rho = 0$ . Esto nuevamente es una manifestación de que el problema tiene características, y al igual que en el caso de

las transformadas de Fourier, se refleja en cambios bruscos del valor de una integral, dependiendo del signo del exponente que aparece en ella. Notemos finalmente que por definición de transformada de Laplace, (5.24) se ve como  $\rho(x, t) = g(t - \frac{x}{c})$ , que es el resultado obtenido por el método de las características.

Queda como ejercicio el encontrar la fórmula de D'Álambert usando la transformada de Laplace.

Ilustraremos ahora el uso de la Transformada de Laplace en el caso del problema de líneas de transmisión que fue estudiado en el capítulo 2. Consideraremos el problema

$$\begin{aligned} cv_t + i_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ Li_t + v_x &= 0, & x \geq 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = i(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ v(0, t) &= g(t), & t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Tomando la transformada de (5.25) sobre la variable temporal, así obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones ordinarias

$$\begin{aligned} sc\tilde{v} + \tilde{i}_x &= 0, & x \geq 0, \\ sL\tilde{i} + \tilde{v}_x &= 0, & x \geq 0, \\ \tilde{v}(0, s) &= \tilde{g}(s), \end{aligned} \quad (5.26)$$

que desde luego depende del parámetro  $s$ . Además como suponemos a  $\tilde{i}$  y  $\tilde{v}$  transformadas de Laplace, debemos buscar soluciones de (5.26) que sean acotadas cuando  $s \rightarrow \infty$  y tales que  $Re\{s\} > 0$ . El sistema (5.26) lo resolvemos de la manera usual tomando

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} e^{\lambda x}$$

y determinando  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  y  $\lambda$  de la ecuación de valores propios

$$\begin{pmatrix} -\lambda & -sc \\ -sL & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.27)$$

Para tener soluciones no triviales en (5.27) necesitamos que  $\lambda = \pm\sqrt{Lc} s$ , y como queremos que  $\tilde{i}, \tilde{v} \rightarrow 0$  si  $Re\{s\} > 0$  y  $s \rightarrow \infty$ , por lo tanto debemos tomar el valor propio negativo  $\lambda = -\sqrt{Lc} s$ . La solución es

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(s) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{L}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{Lc} x} \quad (5.28)$$

donde  $\mathcal{A}(s)$  debe determinarse usando la condición de frontera en  $x = 0$ . De esta manera se obtiene que

$$\begin{pmatrix} \tilde{i} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \tilde{g}(s) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{c}{L}} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-s\sqrt{Lc} x}.$$

Invirtiendo (5.3) se encuentra que

$$i = \sqrt{\frac{c}{L}} g(t - \sqrt{Lc} x), \quad v = g(t - \sqrt{Lc} x)$$

que es el mismo resultado obtenido usando las características.

Como una última aplicación de las transformadas de Laplace, examinaremos un problema donde la solución buscada tiene una discontinuidad fija en un punto como función del tiempo. (Un ejemplo de esto lo dimos ya en (2.52) cuando estudiamos la formación de ondas planas utilizando las ecuaciones de Maxwell). El problema por resolver ahora es

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, & t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u(\epsilon, t) - u(-\epsilon, t)\} &= 0, & t \geq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u_x(\epsilon, t) - u_x(-\epsilon, t)\} &= g(t), & t \geq 0, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde  $g(t)$  es una función conocida. La interpretación es que (5.29) describe el movimiento de una cuerda provocado por una diferencia de tensión  $g(t)$  en  $x = 0$ . Un modelo muy similar es usado en sismología para estudiar dislocaciones en el terreno (que se representan por discontinuidades) y ver el tipo de ondas sísmicas que ellas producen.

Tomando la transformada de Laplace en (5.29) en la variable temporal tenemos

$$\begin{aligned} s^2 \tilde{u} &= \tilde{u}_{xx}, & -\infty < x < 0, & 0 < x < \infty, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\tilde{u}(\epsilon, s) - \tilde{u}(-\epsilon, s)\} &= 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{\tilde{u}_x(\epsilon, s) - \tilde{u}_x(-\epsilon, s)\} &= \tilde{g}(s). \end{aligned} \quad (5.30)$$

La solución de (5.30) es

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= A(s)e^{-sx}, & x > 0, \\ \tilde{u} &= B(s)e^{sx}, & x < 0, \end{aligned}$$

donde las funciones  $A(s)$ ,  $B(s)$  se determinan del comportamiento de  $\tilde{u}$  en  $x = 0$ . De (5.30) tenemos que  $A(s) = B(s) = -\frac{\tilde{g}(s)}{2s}$ . Invirtiendo la transformada tenemos que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_B -\frac{1}{2s} \tilde{g}(s) e^{s(t-x)} ds, & x > 0, \\ u(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_B -\frac{1}{2s} \tilde{g}(s) e^{s(t+x)} ds, & x < 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Usando el teorema de convolución para transformadas de Laplace, (Apéndice) obtenemos la expresión final para  $u(x, t)$  en la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^{t-x} g(s) ds, \quad x > 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^{t+x} g(s) ds, \quad x < 0, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Claramente (5.32) es la solución del problema como puede verificarse por substitución directa. Queda entonces como ejercicio el resolver este problema usando el método de las características y comparar la solución con (5.32). También se resuelve la (2.52) usando transformadas de Laplace.

Como último ejercicio queda el resolver por transformadas y por características el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad -\infty < x < 0, \quad 0 < x < \infty, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u(\epsilon, t) - u(-\epsilon, t)\} &= g(t), \quad t \geq 0, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{u_x(\epsilon, t) - u_x(-\epsilon, t)\} &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$



## Capítulo 6

# Ecuación de onda en tres dimensiones

En esta sección estudiaremos algunos problemas relacionados con la propagación de ondas en un espacio de tres dimensiones. Veremos que son muy variados los problemas que dan origen a la ecuación de onda, pero fijaremos nuestra atención en el problema de propagación de ondas de sonido que resulta familiar a todos nosotros. Las técnicas que emplearemos son una combinación de transformada de Laplace y Fourier. No discutiremos las técnicas de características las cuales cuando la dimensión del espacio es mayor que uno, tienen mayor utilidad en la construcción de soluciones aproximadas. Para un análisis de estos aspectos remitiremos al lector al Courant-Hilbert [3].

### 6.1. Propagación de ondas sonoras

Empezaremos por encontrar las ecuaciones que controlan la propagación de las ondas sonoras. Para esto recordemos que el aire es un gas, y que las ondas sonoras son cambios de densidad y presión, y por ello la manera de describir dichas ondas es mediante las ecuaciones de Navier-Stokes.

Estas ecuaciones son bastantes parecidas a las que ya discutimos en el caso de propagación de ondas en agua, sólo que en este caso hay que tomar en cuenta que el aire es compresible, y que su densidad en cada punto va a cambiar como consecuencia del movimiento.

Si denotamos por  $\rho$  a la densidad,  $p$  la presión, y  $u$  la velocidad del gas, tenemos que las ecuaciones son

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla \cdot (\rho u) &= 0, & \text{Conservación de masa,} \\ \rho(u_t + u \cdot \nabla u) - u \nabla \cdot (\rho u) &= -\nabla p + F_{ext}, & \text{Ley de Newton.} \end{aligned} \quad (6.1)$$

En (6.1) hay cuatro ecuaciones para cinco incógnitas. Necesitamos una relación más para poder cerrar la (6.1). Dicha relación experimental expresa nuestro modelo del gas, a saber, la ecuación de estado  $p = p(\rho)$ . Es de esperarse que para diferentes ecuaciones de estado se tendrán diferencias en la propagación de ondas. Las ecuaciones (6.1) deben ser suplementadas con condiciones iniciales y de frontera, constituyen un problema formidable y aún no está completamente resuelto. Por esto las aproximaremos en forma apropiada para describir las ondas de sonido.

En primer lugar las ondas de sonido sólo producen pequeñas variaciones en la densidad y presión de equilibrio  $\rho_0$  y  $p_0$ . Además, el gas originalmente en reposo adquiere únicamente una velocidad pequeña. Por lo anterior buscamos soluciones de la forma

$$\rho = \rho_0 + \tilde{\rho}, \quad p = p_0 + \tilde{p}, \quad u = \tilde{v}, \quad (6.2)$$

donde  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{v}$  son tales que podemos despreciar sus productos. De igual manera, usando (6.2), tenemos que la ecuación de estado es

$$p = p_0 + \tilde{p} = p(\rho_0 + \tilde{\rho}) = p(\rho_0) + p'(\rho_0)\tilde{\rho} + \theta(\tilde{\rho})^2; \quad \tilde{p} = p'(\rho_0)\tilde{\rho} \quad (6.3)$$

donde  $p'(\rho_0) > 0$ , ya que al aumentar la densidad también aumenta la presión. Sustituyendo (6.2) y (6.3) por la (6.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_t + \rho_0 \nabla \cdot \tilde{v} &= 0 \\ \rho_0 \tilde{v}_t &= -p'(\rho_0) \nabla \tilde{\rho} + F_{ext} \end{aligned} \quad (6.4)$$

y esperamos que (6.4) sea una aproximación adecuada para ondas de sonido. Este sistema de ecuaciones es lineales para  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{v}$ . Resulta conveniente para nuestros propósitos expresar  $\tilde{v}$  en términos de  $\tilde{\rho}$ , que a su vez es proporcional a  $\tilde{p}$ . Esto se obtiene tomando la derivada respecto a  $t$  en la primera de las ecuaciones (6.4), así como la divergencia de la segunda. Obtenemos, omitiendo las tildes, que

$$\rho_{tt} = -\rho_0 \nabla \cdot v_t = p'_0(\rho_0) \nabla^2 \rho - \nabla \cdot F_{ext} \quad (6.5)$$

o bien,

$$\frac{1}{p'(\rho_0)} \rho_{tt} = \nabla^2 \rho + f(\mathbf{x}, t).$$

Desde luego hay que dar condiciones iniciales para (6.5), por ejemplo, el estado de reposo  $\rho = \rho_t = 0$ ;  $t = 0$ , y especificar  $f(\mathbf{x}, t)$  que es la fuente que produce el sonido. Notemos en (6.5) que  $p'(\rho_0)$  tiene dimensiones de velocidad, y en la versión

unidimensional de este modelo, es el cuadrado de la velocidad de propagación de las ondas. Esperamos también que en (6.5) se represente la velocidad de los disturbios. Tomando  $p'(\rho_0) = 1$ , el problema por resolver es

$$\begin{aligned} \rho_{tt} - \nabla^2 \rho &= f(\mathbf{x}, t), & t \geq 0, \\ \rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_t(\mathbf{x}, 0) &= 0, \\ f(\mathbf{x}, t) &= 0 \text{ si } |\mathbf{x}| > R, \quad t < 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde  $\rho$ , que es proporcional a  $p$ , se interpreta como la intensidad del sonido producido por  $f$ .

Resolveremos (6.6) tomando transformada de Laplace en  $t$ , y de Fourier en  $\mathbf{x}$ , teniendo con ello que  $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)\tilde{\rho} = \tilde{f}$ , de donde

$$\tilde{\rho} = \frac{\tilde{f}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} \quad (6.7)$$

y la solución de (6.6) está dada invirtiendo la (6.7) en la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(\mathbf{k}, s)}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k} \right\} e^{st} ds. \quad (6.8)$$

Para calcular (6.8) es conveniente primero invertir la transformada de Fourier y tener

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{f} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} d\mathbf{k}. \quad (6.9)$$

Vemos que en (6.9) podemos usar el teorema de la convolución y tener

$$\tilde{\rho}(\mathbf{x}, s) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', s) \tilde{f}(\mathbf{x}', s) d\mathbf{x}'$$

donde la función  $G(\eta, s)$ , que se llama la función de Green del problema, está dada por

$$G(\eta, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}}}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + s^2)} d\mathbf{k}. \quad (6.10)$$

La (6.10) se calcula haciendo un cambio de variables a coordenadas polares escogiendo a  $\eta$  como eje y obteniendo, si  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = r^2$ , que

$$\begin{aligned} G(\eta, s) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{e^{-ir|\eta| \cos \theta}}{(r^2 + s^2)} r^2 \sin \theta d\theta dr \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_{-ir|\eta|}^{ir|\eta|} \frac{e^{ur^2} du dr}{(r^2 + s^2) ir|\eta|} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \frac{2ir \sin(r|\eta|) dr}{i|\eta|(r^2 + s^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{(2\pi)^2|\eta|} \int_0^\infty \frac{r \sin(r|\eta|) dr}{r^2 + s^2} = \frac{1}{(2\pi)^2|\eta|} \int_{-\infty}^\infty \frac{x \sin x dx}{x^2 + s^2|\eta|^2} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2|\eta|} \operatorname{Im} \left\{ \int_{-\infty}^\infty \frac{x e^{ix}}{x^2 + s^2|\eta|^2} dx \right\}. \tag{6.11}
\end{aligned}$$

La (6.11) se calcula con residuos (lo cuál se deja como ejercicio) y se obtiene la expresión para  $G(\eta, s)$  en la forma

$$G(\eta, s) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-s|\eta|}}{|\eta|}, \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0 \tag{6.12}$$

Finalmente usando (6.12) en la ecuación (6.8) se encuentra que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{f}(\mathbf{x}', s)}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} d\mathbf{x}' \right\} ds. \tag{6.13}$$

En la (6.13) podemos invertir la transformada de Laplace usando directamente la definición, y por lo tanto tendremos que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(\mathbf{x}', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' \tag{6.14}$$

que es la solución buscada. Cabe mencionar que dicha fórmula se debe a Poisson.

## 6.2. La fórmula de Poisson y su interpretación

Interpretaremos ahora la (6.14) en términos de nuestras ideas sobre propagación de sonido. Para esto nos referimos a la Fig. 5.1 donde  $\Omega$  es la región ocupada por la fuente,  $\mathbf{x}$  el punto de observación, y  $\Delta \mathbf{x}'_i$  es una partición de  $\Omega$ .

Para interpretar la (6.14) es conveniente pensar en la fuente  $\Omega$  como discretizada y aproximar la integral por una suma.

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^N \frac{f(\mathbf{x}'_i, t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|} \Delta \mathbf{x}'_i. \tag{6.15}$$

Ahora podemos analizar (5.15) de la siguiente manera: cada región  $\Delta \mathbf{x}'_i$  emite sonido de acuerdo con la fuente  $f(\mathbf{x}'_i, t)$ . En el punto  $\mathbf{x}$ , el sonido que se escucha al tiempo  $t$  es precisamente el emitido en  $\mathbf{x}'_i$  al tiempo  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|$ , ya que el sonido (cuya velocidad supusimos 1) tarda en viajar de  $\mathbf{x}'_i$  a  $\mathbf{x}$  un tiempo  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|$ . Por esto (5.15) nos dice que el sonido escuchado en  $\mathbf{x}$  es la suma de los sonidos emitidos en  $\mathbf{x}'_i$  en los tiempos

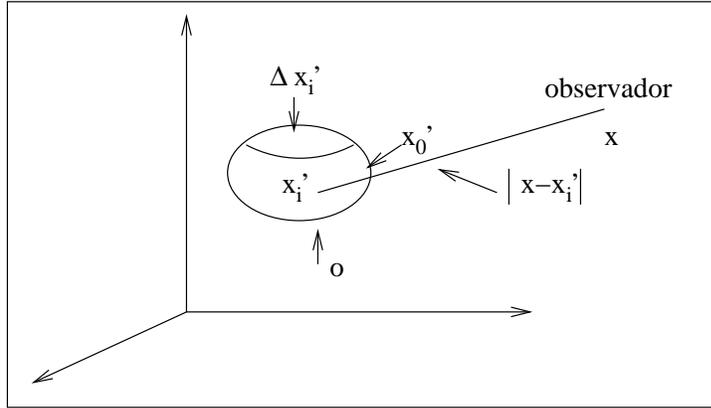


Fig. 5.1

apropiados para que llegue a  $\mathbf{x}$ . De acuerdo con esta interpretación, si al tiempo  $t = 0$  hay quietud, entonces la primera onda que llega es aquella emitida por  $\mathbf{x}'_0$ , donde  $\mathbf{x}'_0$  es el punto de la fuente más cercana a  $\mathbf{x}$ . Por lo tanto, si  $t < |\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|$  tendremos que  $\rho = 0$ .

Veremos ahora que nuestra interpretación es consistente con la ecuación (6.14). Lo anterior se sigue si escribimos (6.13) en la forma

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}', s) e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} ds. \quad (6.16)$$

De (6.16) se sigue que  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < t - |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}|$  para  $\mathbf{x}'$  en  $\Omega$ . Por ello, si  $t - |\mathbf{x}'_0 - \mathbf{x}| < 0$  entonces la exponencial en el integrando decae para  $\text{Re}\{s\} > 0$ . Entonces, para todas las  $\mathbf{x}'$  en  $\Omega$  se tiene que

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(\mathbf{x}', s) e^{s(t-|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|)} ds = 0$$

de donde se sigue que  $\rho = 0$  tal como esperábamos. Queda ahora como ejercicio para el lector convencerse que la (6.14) lleva directamente al mismo resultado.

Se deja también como ejercicio resolver la (6.6) con este método para el caso unidimensional, y dar una interpretación de la solución en el plano  $(x, t)$ .

### 6.3. Aplicaciones de la fórmula de Poisson

Vemos que (6.16) está resuelta explícitamente en términos de (6.14). Sin embargo, el obtener información detallada para funciones  $f$  específicas resulta complicado, ya

que se debe determinar la parte de  $\Omega$  que contribuye a la (6.14) para un tiempo  $t$ , a través de la relación no lineal  $t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ . Este problema se presenta cuando se trata de calcular la forma de las ondas sísmicas emitidas por una falla del terreno que se modela a través de la función  $f(\mathbf{x}, t)$ . Por este motivo debe recurrirse a aproximaciones o integración numérica de (6.14). Ahora discutiremos algunas aproximaciones que nos darán un mejor entendimiento del uso y las limitaciones de la misma. En primer lugar consideremos el caso en el que  $f(\mathbf{x}, t)$  es de la forma

$$f(\mathbf{x}, t) = \delta_\epsilon(\mathbf{x})g(t) \quad (6.17)$$

donde la función  $\delta_\epsilon(\mathbf{x})$  sólo es apreciable dentro de una esfera de radio  $\epsilon$ . Por ejemplo

$$\delta_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|^2} h_\epsilon(\mathbf{x}); \quad h_\epsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & |\mathbf{x}| \leq \epsilon, \\ 0, & |\mathbf{x}| > \epsilon. \end{cases}$$

Para una distribución de intensidad en la fuente dada como en (6.17) (fuente concentrada en el origen) tenemos que la fórmula (6.14) toma la forma

$$\rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{|\mathbf{x}'| \leq \epsilon} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'||\mathbf{x}'|^2} d\mathbf{x}'. \quad (6.18)$$

Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , usando el teorema del valor medio tenemos que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int_{\mathbb{R}^3} \delta_\epsilon(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' = \frac{g(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}. \quad (6.19)$$

La (6.19) nos da la intensidad de sonido en  $\mathbf{x}$  emitido por una fuente puntual (muy concentrada en  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ) que varía como  $g(t)$ . Notemos que  $\rho$  no depende del ángulo, ya que la situación es esféricamente simétrica. Observemos también que el sonido recibido en  $\mathbf{x}$  al tiempo  $t$  es  $g(t - |\mathbf{x}|)$ , atenuado por  $\frac{1}{|\mathbf{x}|}$  pero de la misma forma  $g$ . Es decir, no hay distorsión.

Otra situación de interés en la solución (6.14) es cuando  $f(\mathbf{x}, t)$  está concentrada cerca de una región del plano  $xy$ , por ejemplo

$$f(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} g(x, y, t), & |x| \leq 2, \quad |y| \leq 1, \quad |z| \leq \frac{\epsilon}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & |x| > 2, \quad |y| > 1, \quad |z| > \frac{\epsilon}{2}, \quad t > 1. \end{cases} \quad (6.20)$$

Esta función representa una fuente de sonido concentrada cerca del plano  $z = 0$ , y es una versión simple de un modelo usado con frecuencia en sismología, donde  $f$  se interpreta como la fuerza de una falla del terreno, y la solución representa la onda sísmica. La región donde  $f \neq 0$  se ve en la Fig. 5.2.

Para una  $f$  como en (6.20), (6.14) queda de la siguiente manera

$$\rho_\epsilon(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{g(x', y', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy' dz'. \quad (6.21)$$

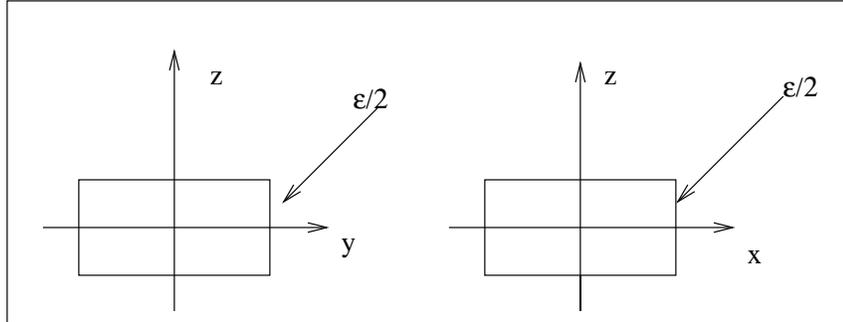


Fig. 5.2

Cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , los puntos  $\mathbf{x}'$  quedan atados sobre el plano  $z = 0$ , y tomando el límite cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , se obtiene que

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \frac{g(x', y', t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dx' dy'. \quad (6.22)$$

Podemos simplificar (6.22) si suponemos que la distancia  $|\mathbf{x}|$  del punto a la fuente es mucho mayor que las dimensiones de la fuente. Es decir,  $|\mathbf{x}'| \ll |\mathbf{x}|$ . En este caso aproximamos  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  como

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = \left\{ (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}') \right\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{|\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' + |\mathbf{x}'|^2} = |\mathbf{x}| - \hat{x} \cdot \mathbf{x}'$$

con  $\hat{x} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ . Usando la última aproximación, (6.22) se escribe como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 g(x', y', t - |\mathbf{x}| + \hat{x} \cdot \mathbf{x}') dx' dy' \quad (6.23)$$

Para calcular (6.23) es conveniente tomar  $t - |\mathbf{x}| = \tau$ , es decir, llamar  $\tau = 0$  el tiempo al que llega la señal de  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  al punto  $\mathbf{x}$ .

Vemos que la forma de la onda  $\rho(\mathbf{x}, t)$  depende a través de  $\hat{x}$  del ángulo de observación. Calcularemos con detalle la (6.23) cuando  $\hat{x} = (1, 0, 0)$ ,  $g = 1$ . En dicho caso, una vista superior de la situación se ilustra en la Fig. 5.3.

De (6.23) vemos que  $\rho(\mathbf{x}, t)$  es precisamente el área, al tiempo  $t$ , de la región del rectángulo  $|x| \leq 2$ ;  $|y| \leq 1$  en la que  $g \neq 0$ . Debemos pues encontrar estas regiones como función del tiempo a partir de la ecuación (6.20). De ella vemos que  $g \neq 0$  si

$$\begin{aligned} -2 \leq x' \leq 2, & \quad -1 \leq y' \leq 1, \\ 0 \leq \tau + x' \leq 1, & \quad -\tau \leq x' \leq 1 - \tau. \end{aligned} \quad (6.24)$$

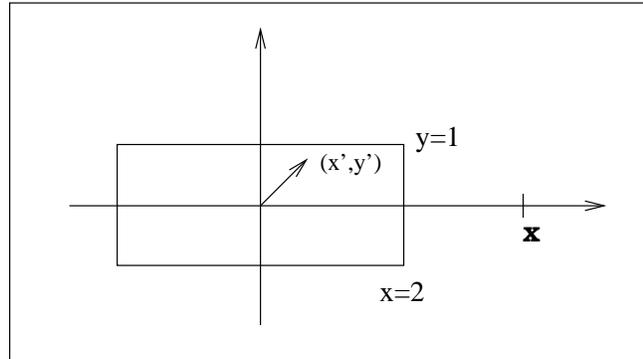


Fig. 5.3

La (6.24) nos dicen que  $g \neq 0$  para los puntos dentro del rectángulo cuya  $x'$  está entre las rectas  $L_1 : x' = \tau$  y  $L_2 : x' = 1 - \tau$ . Identifiquemos ahora las regiones. Si  $\tau < -2$  tenemos que la recta  $L_1$  queda a la derecha de  $x = 2$ . Por esto  $g = 0$  y  $\rho = 0$  si  $\tau < -2$ . Para  $\tau > -2$ , la región donde  $g \neq 0$  es la sombreada en la Fig. 5.4.

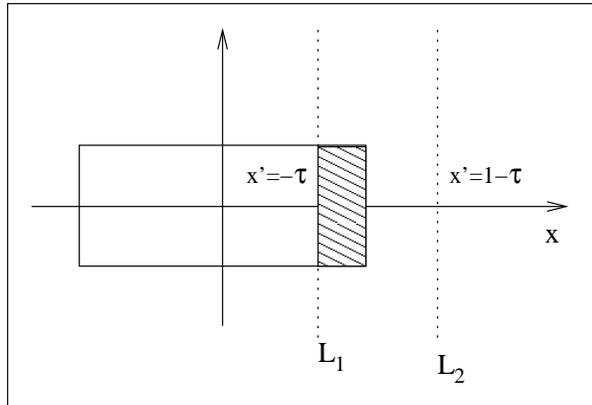


Fig. 5.4

de donde  $\rho = 2(2 + \tau)$ . Esta situación prevalece hasta que  $L_2$  llega a  $x = 2$ , es decir, cuando  $\tau = -1$ . Para tiempos  $\tau$  mayores que  $-1$ , se tiene que la región que contribuye es aquella sombreada en Fig. 5.5.

De la figura anterior tenemos que para  $\tau > -1$ ,  $\rho = 2$ . Esto sucede hasta que  $L_1$

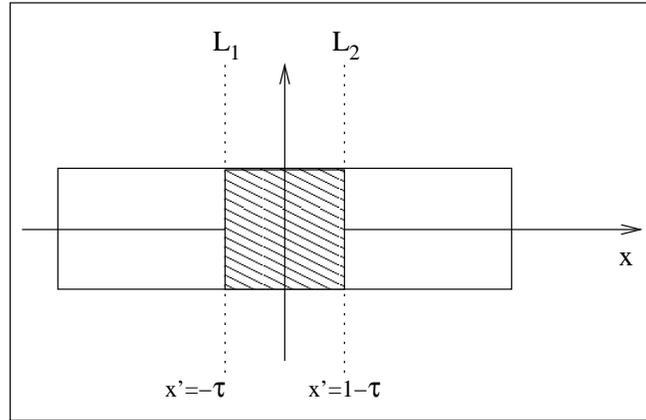


Fig. 5.5

llega a  $x = -2$  que es cuando  $\tau = 2$ . Para tiempos  $\tau > 2$ , el área que contribuye está sombreada en la Fig. 5.6.

En este caso tenemos que  $\rho = 2(\tau - 3)$  para  $\tau \geq 2$ . Cuando  $\tau > 3$ ,  $\rho = 0$  ya que  $L_2$

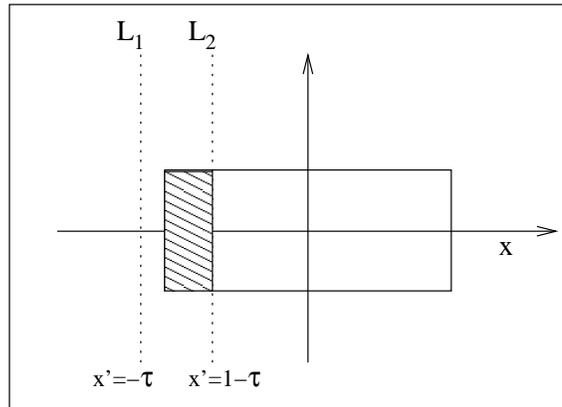


Fig. 5.6

abandona el rectángulo. Resumiendo vemos que

$$4\pi|\mathbf{x}|\rho(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 0, & \tau \leq -2, \\ 2(2 + \tau), & -2 \leq \tau \leq -1, \\ 2, & -1 \leq \tau \leq 2, \\ 2(\tau - 3), & 2 \leq \tau \leq 3, \\ 0, & 3 \leq \tau. \end{cases}$$

La gráfica de la amplitud de la onda de sonido se muestra en la Fig. 5.7.

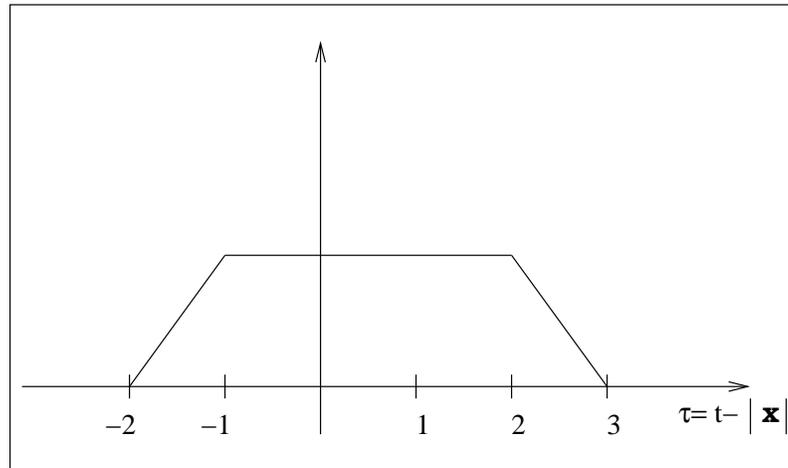


Fig. 5.7

En la Fig. 5.7 vemos que la primera señal  $\mathbf{x}$  es aquella que viene de la región derecha del rectángulo que es la más cercana al punto de observación. Estas señales llegan para  $\tau < 0$ , ya que llegan antes de las que fueron emitidas en  $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  cuyo tiempo de llegada a  $\mathbf{x}$  hemos escogido como  $\tau = 0$ . A tiempos posteriores contribuyen las regiones más alejadas hasta que la última señal llega de la franja situada en  $\mathbf{x}' = -2$  que es la parte más alejada de la fuente.

Queda como un ejercicio calcular  $\rho(\mathbf{x}, t)$  cuando  $\hat{\mathbf{x}} = (0, 1, 0)$  y  $\hat{\mathbf{x}} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ . Además calcular la onda que llega a un punto lejano cuando la fuente es circular. Es decir tomando en (6.21)  $g(x', y', t) = 1$  si  $x'^2 + y'^2 \leq 1$ ,  $t \leq 1$ ,  $t \geq 0$  y  $g = 0$  fuera de esas regiones. Compare los resultados en ambos casos.

## 6.4. El problema con valores iniciales para la ecuación de onda en tres dimensiones

Para terminar nuestra breve discusión sobre la ecuación de onda en tres dimensiones consideramos el problema con valores iniciales

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \nabla^2 u, \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= g(x). \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde  $g(x)$  es una función dada. Consideramos (6.25), ya que el problema

$$\begin{aligned} v_{tt} &= \nabla^2 v, \\ v(x, 0) &= g(x), \\ v_t(x, 0) &= 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

tiene por solución  $v = u_t$  donde  $u$  es la solución de (6.25). Esto se puede verificar substituyendo  $u_t$  en (6.26) obteniendo

$$\begin{aligned} v_{tt} - \nabla^2 v &= u_{ttt} - \nabla^2 u_t = (u_{tt} - \nabla^2 u)_t = 0, \\ v(x, 0) &= u_t(x, 0) = g(x), \\ v_t(x, 0) = u_{tt}(x, 0) &= \nabla^2 u(x, 0) = \nabla^2 0 = 0. \end{aligned}$$

Resulta también interesante comprobar este hecho en la ecuación de onda unidimensional para la cual se conocen soluciones explícitas en la (6.25) y la (6.26). Por esta razón sólo resolveremos (6.25).

Tomamos la transformada de Fourier en (6.25),  $\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} u(\mathbf{x}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$  y se obtiene para  $\hat{u}$  la ecuación ordinaria:

$$\hat{u}_{tt} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \hat{u} = 0, \quad \hat{u}(\mathbf{k}, 0) = 0, \quad \hat{u}_t(\mathbf{k}, 0) = \hat{g}(\mathbf{k}),$$

que tiene por solución

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{g}(\mathbf{k}) \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.27)$$

De (6.27) tenemos la solución formal de (6.25) en la forma

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{g}(\mathbf{k}) \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (6.28)$$

Es importante obtener una representación más útil de (6.28). Para esto expresemos  $\hat{g}(\mathbf{k})$  en términos de  $g$  y obtenemos después de invertir el orden de integración (que es legítimo si  $g(\mathbf{x}) = 0$  para  $|\mathbf{x}| > R$ ):

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(\xi) e^{i\mathbf{k}\cdot\xi} \left\{ \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} \right\} d\xi. \quad (6.29)$$

Para calcular (6.29) cambiamos de variable haciendo  $\xi = \mathbf{x} + \eta$ , de manera que

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{x} + \eta) \left\{ \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \eta} d\mathbf{k} \right\} d\eta. \quad (6.30)$$

En (6.30) calculamos la integral respecto a  $\mathbf{k}$  introduciendo coordenadas polares con eje  $\eta$  para obtener así

$$\begin{aligned} \int_{|\mathbf{k}| \leq K} \frac{\sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}} t}{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{k})^{\frac{1}{2}}} e^{i\mathbf{k} \cdot \eta} d\mathbf{k} &= 2\pi \int_0^K \int_0^\pi |\mathbf{k}| e^{i|\mathbf{k}||\eta| \cos \theta} \sin(|\mathbf{k}|t) \sin \theta d\theta d|\mathbf{k}| \\ &= \frac{4\pi}{|\eta|} \int_0^K \sin(|\mathbf{k}||\eta|) \sin(|\mathbf{k}|t) d|\mathbf{k}| = \frac{4\pi}{|\eta|} D(|\eta|, t, K). \end{aligned} \quad (6.31)$$

La integral en (6.31) es la conocida integral de Dirichlet, y sabemos que para cualquier función  $h(|\eta|)$  se tiene que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} 4\pi \int_0^\infty D(|\eta|, t, K) h(|\eta|) d|\eta| = 2\pi^2 h(t). \quad (6.32)$$

Utilizando esta última identidad calcularemos (6.30). Es conveniente introducir coordenadas polares

$$\eta = |\eta| \hat{\theta} = |\eta| (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta); \quad ds = d\hat{\theta}$$

y transformar (6.30) con ayuda de (6.31) en

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty |\eta| \left\{ \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + |\eta| \hat{\theta}) d\hat{\theta} \right\} 4\pi D(|\eta|, t, K) d|\eta|. \quad (6.33)$$

Usando (6.32) llamando  $h(|\eta|) = |\eta| \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + |\eta| \hat{\theta}) d\hat{\theta}$  que es ña función para la cual es válida (6.32). Tenemos que

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{|\hat{\theta}|=1} g(\mathbf{x} + t\hat{\theta}) d\hat{\theta} \quad (6.34)$$

que es la expresión buscada para  $u$  en términos de los datos iniciales. Esta fórmula también se debe a Poisson.

La (6.34) tiene una interpretación muy iluminante. Para darla es conveniente referirnos a la Fig. 5.8.

Al tiempo  $t = 0$  sabemos que  $g \neq 0$  sólo en cierta región que se muestra en la Fig. 5.8. La fórmula (6.34) nos dice que para encontrar  $u(x, t)$  basta trazar una esfera  $S_t$  de radio  $t$  alrededor de  $\mathbf{x}$ , ver qué valores toma  $g$  sobre dicha esfera, e integrar esos valores de  $g$ . En la Fig. 5.8 vemos que en general sólo una parte de  $S_t$  interseca la

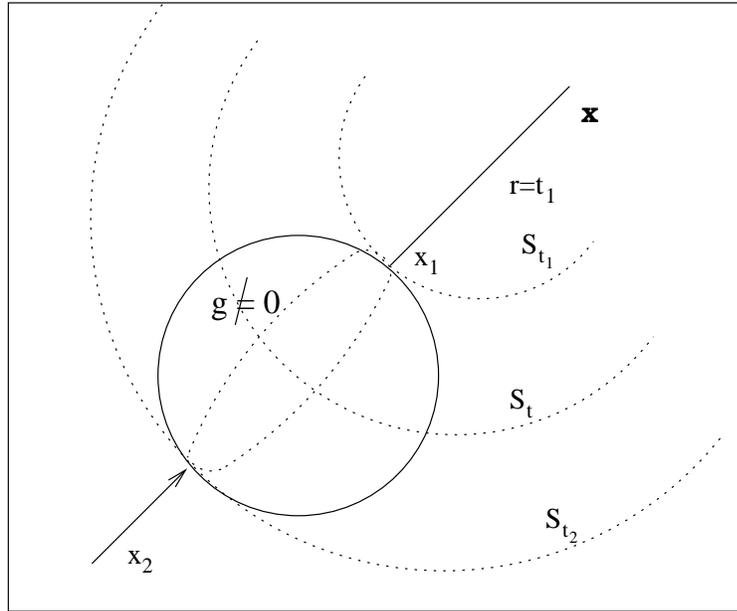


Fig. 5.8

región perturbada por  $g$ . Por ello  $u = 0$  para  $t < t_1$ . De la misma forma la última señal llega cuando  $S_t$  intersecta a la región donde  $g \neq 0$ .

Vemos en la (6.34) que el problema para resolver la ecuación de onda se ha transformado en un problema geométrico que consiste en encontrar como función del tiempo la intersección de  $S_t$  con la región donde  $g \neq 0$ . Esto es en general un problema geométrico bastante complejo que debe resolverse en cada caso. En la mayoría de las ocasiones es imposible evaluar la (6.34) en forma cerrada. Sin embargo, cuando  $|\mathbf{x}|$  es mucho mayor que las dimensiones de la región donde  $g \neq 0$  se puede recurrir a una aproximación. En este caso podemos aproximar  $S_t$  por un plano que tiene por normal un vector a lo largo de la línea que une  $\mathbf{x}$  con el centro de la fuente. Estos planos se desplazan hacia la fuente con velocidad uno.

Para ilustrar esta aproximación tomemos  $u_t(x, 0) = g(x) = 1$  para  $|\mathbf{x}| \leq a$ , y busquemos  $u(\vec{x}_0, t)$  donde  $a \ll |\vec{x}_0|$ . La situación se muestra en la Fig. 5.9.

El plano  $x = x_0 - t$  se mueve hacia la izquierda y la integral de la (6.34) se aproxima por el área sombreada en la Fig. 5.9. Vemos también que para  $0 \leq t \leq x_0 - a$ ,  $u = 0$  ya que  $P_t$  no intersecta a la esfera donde la condición inicial no es cero. Para tiempos

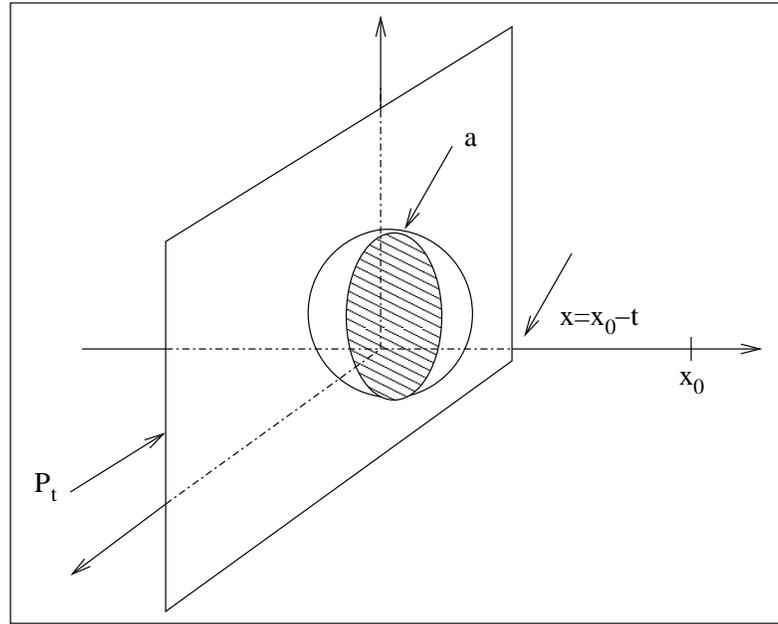


Fig. 5.9

$x_0 - a \leq t \leq x_0 + a$  el área sombreada multiplicada por  $4\pi t$  es el valor de  $u$ . Como vemos en la Fig. 5.9 el área sombreada está dada por  $\pi\{a^2 - (x_0 - t)^2\}$ . Finalmente tenemos que

$$u(x_0, t) = \begin{cases} \frac{t}{4}\{a^2 - (x_0 - t)^2\}, & x_0 - a \leq t \leq x_0 + a, \\ 0, & |t - x_0| \geq a. \end{cases} \quad (6.35)$$

Notamos en la (6.35) que a medida que  $x_0$  se aleja de la fuente, la gráfica de  $u$  se vuelve cada vez más angosta y más alta. Esta situación es desde luego independiente de la orientación de  $x_0$  ya que la simetría es esférica. Queda como un ejercicio el convencerse de este detalle.

Un último ejercicio es encontrar utilizando (6.34) la solución del problema

$$u_{tt} = \nabla^2 u, \\ u(x, 0) = g(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \mathbf{x} \text{ está en el elipsoide } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{array} \right\} \quad (6.36)$$

cuando el punto de observación está alejado del elipsoide, y está sobre los ejes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  respectivamente.

En esta discusión se construyeron varias soluciones para la ecuación de onda en tres

dimensiones. No se probó la unicidad, pero la idea es la misma que la usada para una sola ecuación. Una prueba elemental de estos hechos se encuentra en los libro de Weinberger [15]. Un tratamiento más avanzado podrá consultarse en las notas de J. Ize [8] así como en el libro de Courant-Hilbert [3]. Hay pruebas especiales para las ecuaciones de Maxwell en las notas de K. O. Friedrichs [7].

Para concluir esta sección comentamos que hay métodos alternativos para resolver la ecuación de onda como lo son las funciones de Riemann, los promedios esféricos, y los potenciales de Ritz. Esto no lo discutiremos aquí, y remitimos al lector a los libros de Courant-Hilbert [3], John [10], y Copson [2].



## Capítulo 7

# Ecuación de difusión

En este capítulo se encuentran algunos ejemplos de propagación de calor y de otros procesos de difusión. Los procesos de difusión son muy diferentes a los hiperbólicos que se consideraron al principio de estas notas. En la difusión las soluciones se deforman y los procesos se relajan a un equilibrio. Por otra parte las ecuaciones de difusión también controlan la propagación de inestabilidades de diferentes tipos. En este capítulo se examinan algunos ejemplos prototípicos. También debemos mencionar que este tipo de ecuaciones, que son conocidas como ecuaciones parabólicas, pueden ser interpretadas de manera distinta cuando la variable temporal se considera imaginaria entonces tenemos la ecuación de Schrödinger, lo cual nos amplía aún más la aplicación de las ecuaciones parabólicas en el mundo de la Física. En las últimas décadas, la evolución de la Biología Matemática ha incorporado como una de sus herramientas básicas de modelación a las ecuaciones de calor debido a que son las que nos permiten describir procesos fuera de equilibrio, de difusión y de saturación en medios vivos. No cabe duda que este tipo de ecuaciones son las que nos permiten tener mayor conectividad con otros ambientes académicos como son los de la ciencia de la salud, la economía, las finanzas y muchos otros más.

A continuación vamos a exponer cómo se deducen algunas de las ecuaciones parabólicas lineales que van a ser fundamentales en el estudio de este tipo de problemas, comenzaremos presentando la construcción de la ecuación de calor para luego mostrar como se deducen las ecuaciones de transporte y las ecuaciones con fuentes. A partir de estas ecuaciones vamos a proponer los distintos métodos de solución tanto en dominios acotados como no acotados.

### 7.1. Propagación de calor

En esta sección vamos a introducir la ecuación de calor, que como dijimos, es una ecuación de diferencias en derivadas parciales lineales de segundo orden, para ello utili-

zaremos el modelo de propagación de calor en un medio físico, el cual es muy bien conocido todas las personas que hayan estado en una cocina.

Si tenemos una barilla de algún material, queremos estudiar como cambia la temperatura en dicha barilla debido a la propagación del calor tal como lo vemos en la figura 7.1. De esta forma consideremos entonces a un cuerpo unidimensional en el intervalo  $0 \leq x \leq l$  y denotamos por  $T(x, t)$  la temperatura en el punto  $x$  al tiempo  $t$ , podemos calcular el balance de calor en él. La cantidad de calor en el tramo  $x_0, x_0 + h$ , está dada por:

$$\text{Cantidad de calor} = \text{Calor específico} \times \text{masa} \times \text{temperatura.}$$

Sabemos que

$$\text{masa} = \int_{x_0}^{x_0+h} \rho(x) dx$$

donde  $\rho(x)$  es la densidad. Tenemos así que la cantidad de calor  $H(x, t)$  entre  $x_0$  y  $x_0 + h$  es

$$H(x, t) = \int_{x_0}^{x_0+h} C_e(x) \rho(x) T(x, t) dx, \quad C_e = \text{calor específico.}$$

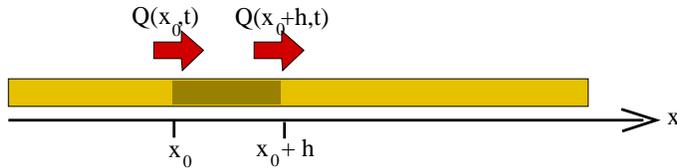


Fig. 7.1

Por otra parte el balance de calor (conservación de energía) nos dice que el cambio de la cantidad de calor entre  $x_0$  y  $x_0 + h$  es igual al calor que entra menos el calor que sale y además debemos considerar aquel calor que es suministrado por agentes externos. Llamaremos flujo de calor,  $Q(x, t)$ , a este calor que "fluye" sobre la barilla. De esta forma, el flujo de calor determina el balance representado en la siguiente ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^{x_0+h} C_e(x) \rho(x) T(x, t) dx = Q(x_0 + h, t) - Q(x_0, t) + \text{calor suministrado.}$$

Falta relacionar el flujo de calor con la temperatura y esto se obtiene de manera empírica. Experimentalmente se determinó que el flujo de calor está relacionado con la temperatura de la siguiente forma

$$Q(x, t) = -K(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

donde  $K(x)$  es la conductividad térmica. Por otra parte el calor suministrado por una fuente externa se puede escribir como

$$\int_{x_0}^{x_0+h} q(x,t)dx, \quad \text{para alguna función } q \text{ dada.}$$

Cambiando la variable  $x_0 + h$  por  $x$  se tiene que

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x C_e(\xi)\rho(\xi)T(\xi,t)d\xi = -K(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + \int_{x_0}^x q(\xi,t)d\xi.$$

Derivando respecto al límite superior tenemos que la temperatura satisface la ecuación

$$C_e(x)\rho(x)T_t(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( K(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + q(x,t). \quad (7.1)$$

Esta es una ecuación de conservación. La ecuación (7.1) debe resolverse con condición inicial  $T(x,0) = h(x)$  y condiciones de frontera en  $x = 0$  y  $x = l$ . Si la temperatura o el flujo están dados en la frontera entonces tendremos como condición de frontera a  $T(0,t)$ ,  $T(l,t)$  o bien  $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t)$  y  $\frac{\partial T}{\partial x}(l,t)$ . Por otra parte en un extremo se puede dar la temperatura y en otro el flujo. Si se considera la ley de enfriamiento de Newton la condición de frontera queda como una combinación de  $T$  y  $T_x$ . La función  $q(x,t)$  de la ecuación (7.1) es un dato del problema.

## 7.2. Dispersión de contaminantes

Un problema interesante al que en una primera aproximación puede aplicarse la ecuación de calor es el de difusión de contaminantes. Para esto suponemos que la concentración de contaminantes en el punto  $x$  al tiempo  $t$  es  $c(x,t)$  y también llamaremos  $Q(x,t)$  al flujo de contaminantes. Entonces se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Variación de la cantidad de contaminantes} &= \text{flujo de contaminantes} \\ &+ \text{la producción del agente,} \end{aligned}$$

es decir:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_0}^x c(\xi,t)d\xi = Q(x,t) - Q(x_0,t) + \text{producción del agente.}$$

El flujo  $Q(x,t)$  se determina experimentalmente. El caso de interés es cuando hay un viento con velocidad  $U$ , en cuyo caso el flujo puede aproximarse por

$$Q(x,t) = K\frac{\partial c}{\partial x}(x,t) + Uc(x,t).$$

donde el primer término es difusivo y el segundo el efecto del transporte por el viento. Entonces la ecuación para difusión y transporte de contaminantes está dada, cuando  $K$  es constante, por

$$c_t = Kc_{xx} + Uc_x. \quad (7.2)$$

Una versión más general, cuando el coeficiente de difusión  $K$  es variable, se plantea, en una región finita, de la siguiente forma:

$$c_e(x)\rho(x)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ K(x)\frac{\partial T}{\partial x} \right] + q(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad t \geq 0,$$

$$T(x, 0) = T_0(x) = \text{temperatura inicial que es conocida}$$

y las condiciones de frontera en  $T(a, t)$  y  $T(b, t)$ . Estas pueden ser de varios tipos. Pueden darse  $T(a, t)$  y  $T(b, t)$ , si el calentamiento está prescrito. Pueden darse los flujos  $K\frac{\partial T}{\partial x}$  en  $x = a$ , y  $x = b$ . También se puede dar en un extremo un flujo y en el otro una temperatura.

Para describir la ley de enfriamiento de Newton en la frontera se da la combinación  $K\frac{\partial T}{\partial x} + \beta(T - T_A) = 0$  donde  $T_A$  es la temperatura del ambiente. El detalle de las soluciones a este tipo de problemas está en el libro de Weinberger. En este capítulo se describen problemas cuya solución si bien es elemental, se dejan para textos más avanzados.

Para estudiar el problema de dispersión de contaminantes por una chimenea colocada en  $x = 0$  se tiene  $c(a, t) = g(t)$  donde  $g(t)$  es la producción de contaminantes. Inicialmente se puede suponer el cielo limpio, es decir  $c(x, 0) = 0$ . La ecuación que debe resolverse es

$$c_t = Kc_{xx} + Uc_x, \quad x \leq 0, \quad t \leq 0,$$

$$c(x, 0) = 0, \quad c(0, t) = g(t).$$

Otro problema es la dispersión de un contaminante que se suelta inicialmente en  $x = 0$ . La solución se busca ahora en toda la recta y la condición inicial es

$$c(x, 0) = \begin{cases} Q/2, & |x| \leq \epsilon, \\ 0, & |x| > \epsilon, \end{cases}$$

que corresponde a soltar una cantidad total  $Q$  de contaminante en el origen.

### 7.3. El efecto de las fuentes

Una clase muy importante de problemas es cuando se tiene una fuente de calor. Con una fuente  $Q$ , la ecuación tiene la forma:

$$T_t = KT_{xx} + Q, \quad (7.3)$$

con condiciones iniciales y de frontera apropiadas. En muchas situaciones  $Q$  depende de la temperatura  $Q = Q(T)$ . Esta dependencia en general es **no** lineal y da origen a muchísimos fenómenos, nuevos e interesantes que a la fecha no están completamente entendidos. Un ejemplo es el de las reacciones exotérmicas. En este caso  $Q(T) = e^{\alpha T}$ . Permaneciendo en el régimen lineal podemos tomar  $Q(T) = \beta T$ . El caso  $\beta > 0$  es de una fuente mientras que  $\beta < 0$  corresponde a un sumidero. En el primer caso la ecuación ordinaria que resulta al tomar  $K = 0$  tenemos entonces la ley de Malthus y se dice que  $T$  es inestable mientras que para  $\beta < 0$  es estable. Así, la ecuación con  $\beta > 0$  y  $K \neq 0$  describe la interacción de la difusión con la inestabilidad. En propagación espacio-temporal de poblaciones o epidemias,  $\beta > 0$  es el término de nacimiento y la ecuación describe la evolución espacio-temporal de una infección o una epidemia.

El caso  $\beta > 0$ , al interpretarse  $T$  como un voltaje en un cable pasivo, representa el decaimiento del voltaje a lo largo del cable debido a las pérdidas resistivas.

## 7.4. Tipos de ecuación de calor lineales

En las secciones anteriores hemos construido varios tipos de ecuaciones de calor que tienen características particulares, ya sea por la conducción de calor, por el transporte de contaminantes o por tener fuentes o sumideros que generan crecimientos o decaimientos en el modelo propuesto. Hagamos ahora un recuento de estas ecuaciones las cuales las identificaremos en tres grupos:

### 1. Ecuación de calor

Consideremos la ecuación (7.1) que estudiamos como modelo de flujo de calor en una barilla. Si las funciones  $C_e$ ,  $\rho$  y  $K(x)$  son constantes y la fuente de calor  $q(x, t)$  es cero tenemos la ecuación parabólica lineal más sencilla, la cual la podemos denotar en una forma más general como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u \quad u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (7.4)$$

La constante  $D$ , que multiplica al laplaciano de  $u$ , la llamamos el coeficiente de difusión. Si la función  $u$  está definida en una región  $\Omega$  entonces debemos de dar la condición en la frontera de esta región, la cual puede ser

$$u(x, t) \quad \text{o} \quad \frac{\partial u}{\partial n} \quad x \in \partial\Omega$$

siendo  $\partial/\partial n$  la derivada normal a la frontera. Además debemos dar la condición inicial al problema, la cual es  $u(x, 0) = h(x)$ , con  $x \in \Omega$ .

Cuando estamos en una dimensión, esta ecuación la representamos así:

$$\begin{aligned}
 u_t &= Du_{xx} & u &: (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 u(x, 0) &= h(x) & x &\in [a, b] \\
 u(a, t) &= f(t) & u(b, t) &= g(t) \\
 u_x(a, t) &= f(t) & \text{o} & \\
 u_x(b, t) &= g(t) & &
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

## 2. Ecuación de calor con transporte

La ecuación de calor que describe la dispersión de contaminantes (7.2) puede ser escrita en forma más general como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + CV \cdot \Delta u \quad u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{7.6}$$

la cual es conocida como ecuación de calor con transporte, donde  $V$  es un campo de velocidades definido en  $\Omega$  y  $C$  una constante. Las condiciones de frontera son las mismas que (7.4).

Cuando estamos en una dimensión, esta ecuación la podemos resumir como

$$\begin{aligned}
 u_t &= Du_{xx} + Vu_x & u &: (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 u(x, 0) &= h(x) & x &\in [a, b] \\
 u(a, t) &= f(t) & u(b, t) &= g(t) \\
 u_x(a, t) &= f(t) & \text{o} & \\
 u_x(b, t) &= g(t) & &
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

## 3. Ecuación de calor con fuentes

La tercera ecuación que construimos fue la ecuación de calor con fuentes (7.3), la cual la podemos expresar en forma más general como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u + \beta u \quad u : \Omega \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \tag{7.8}$$

donde también las condiciones de frontera son las que dimos para la ecuación (7.4) y donde  $\beta$  es una constante cuyo signo define si el proceso es exponencialmente creciente o decreciente.

Al escribir la ecuación con fuentes en una dimension tenemos la siguiente ex-

presión

$$\begin{aligned}
 u_t &= Du_{xx} + \beta u & u &: (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
 u(x, 0) &= h(x) & x &\in [a, b] \\
 u(a, t) &= f(t) & u(b, t) &= g(t) \\
 & & \text{o} & \\
 u_x(a, t) &= f(t) & u_x(b, t) &= g(t)
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

Para encontrar la solución de estas ecuaciones aparentemente debemos buscar uno para cada tipo de ecuación de calor, sin embargo vamos a mostrar que solo necesitamos saber resolver la ecuación de calor pues las otras ecuaciones pueden deducirse su solución por unos simples trucos de cambio de variables. Por simplicidad solo consideremos el caso en una dimensión.

Comencemos con la ecuación de calor con fuentes (7.9), donde  $\beta$  es una constante

$$u_t = Du_{xx} + \beta u$$

Si hacemos la substitución  $u = e^{\beta t} w$  entonces la ecuación anterior nos queda

$$\beta e^{\beta t} w + e^{\beta t} w_t = De^{\beta t} w_{xx} + \beta e^{\beta t} w$$

al simplificar esta ecuación factorizando las exponenciales obtenemos finalmente la ecuación de calor

$$w_t = Dw_{xx}$$

Para el caso de la ecuación de calor con transporte (7.7) hagamos el siguiente cambio de variable,  $z = x - Vt$ , la cual aplicamos a la ecuación con transporte

$$u(x, t)_t = Du_{xx}(x, t) + V u_x(x, t)$$

la cual nos queda

$$u_t(z + Vt, t) = Du_{xx}(z + Vt, t) + V u_x(z + Vt, t)$$

Es claro que  $u_z = u_x$ , además

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} (V) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

quedando

$$V u_z + u_t = Du_{zz} + V u_z$$

lo cual se reduce a la ecuación de calor pero en las variables  $(z, t)$ .

Es claro entonces que solo necesitamos aprender a resolver la ecuación de calor (7.5) para así encontrar la solución de la ecuación con transporte o bien la ecuación con fuentes. En las siguientes secciones vamos a estudiar distintos casos, dependiendo de los dominios, para encontrar la solución de la ecuación de calor

## 7.5. Resolución de la ecuación de calor en dominios acotados

Los métodos de separación de variables que vimos en las secciones anteriores pueden ser aplicados en las ecuaciones parabólicas, en esta sección vamos a presentar un par de problemas donde veamos como se aplican estos métodos para la ecuación de calor en dominios finitos.

Consideremos el problema de la ecuación de calor en un dominio acotado, tal como lo vemos en la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & 0 < x < L \end{aligned} \tag{7.10}$$

Vamos a proponer la siguiente separación de variables,  $u(x, t) = \phi(x) G(t)$ . Al substituir nuestra función  $u$  en (7.10) tenemos lo siguiente

$$\phi(x) \frac{dG}{dt}(t) = k \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) G(t)$$

ordenando la expresión anterior vemos que

$$\frac{1}{kG(t)} \frac{dG}{dt}(t) = \frac{1}{\phi(x)} \frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) = -\lambda$$

La constante  $-\lambda$  la hemos escogido negativa para asegurar que el proceso relaja y que no explota. La ecuación para la  $\phi$  queda expresada como

$$\frac{d^2 \phi}{dx^2}(x) = -\lambda \phi(x) \quad \phi(0) = \phi(L) = 0$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden pero con condiciones de frontera, la cual corresponde a la teoría de Sturm-Liouville y que nos asegura que existe solución para este tipo de ecuaciones (debemos de recordar que el teorema de existencia y unicidad no se aplica para los problemas con condiciones a la frontera). La solución a este problema es la familia de funciones

$$\phi_m(x) = \text{sen}\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \quad \lambda_m = \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2$$

para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Debemos observar que tal como lo dice la teoría de Sturm-Liouville, las  $\lambda_m$  son constantes positivas y que están ordenadas crecientemente en

7.5. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN DOMINIOS ACOTADOS 161

función del índice  $m$ , además cada  $\lambda_m$  es un valor propio asociado a la función propia  $\phi_m(x)$ . Finalmente, las funciones propias  $\phi_m(x)$  forman una base ortogonal de funciones en el intervalo  $0 < x < L$ .

Por otro lado, la ecuación temporal es

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda_m k G$$

cuya solución es

$$G(t) = a_m \exp\left(-k \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 t\right)$$

la cual es una función exponencial que hemos escogido que amortigue cuando  $t \rightarrow \infty$  al escoger que  $-\lambda < 0$  y donde  $a_m$  es una constante a determinar.

Finalmente, la solución general esta dada de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \exp\left(-k \left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 t\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \quad (7.11)$$

Si la condición inicial la podemos expresar en términos de la base de funciones  $\{\phi_m(x)\}$ , tal que

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L} x\right) \quad (7.12)$$

Entonces podemos observar que cuando  $t = 0$  entonces necesariamente  $a_m = f_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

Tomemos por ejemplo una condición inicial igual a una función constante de altura 100 en el intervalo  $(0, 1)$ . Si graficamos las soluciones para distintos tiempos  $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ , así observamos cómo la solución amortigua hacia 0 en la medida que el tiempo evoluciona tal como lo vemos en la figura Fig. 7.2, este efecto es el que esperamos ver en una barilla que inicialmente tiene una temperatura homogénea y lo colocamos en un baño térmico, es decir, colocamos la barilla tal que sus extremos queden a una temperatura constante  $u = 0$ .

El problema corresponde a una barilla unidimensional. ¿Pero que sucedería si dicha barilla la torcemos tal que que nos quede un anillo unido en sus extremos? En este caso debemos cambiar la condición de frontera ya que al estar unido los extremos entonces necesitamos que el flujo de calor sea continuo ahí, es decir, necesitamos poner una condición de frontera tipo mixto, es decir, debemos dar una condición de continuidad en  $u$  en la frontera del tipo Dirichet y otra condición de continuidad tipo Neumann en la derivada de  $u$  para asegurar que el flujo de calor sea continuo, además debemos proporcionar la condición inicial, tal como lo vemos en la siguiente ecuación diferencial:

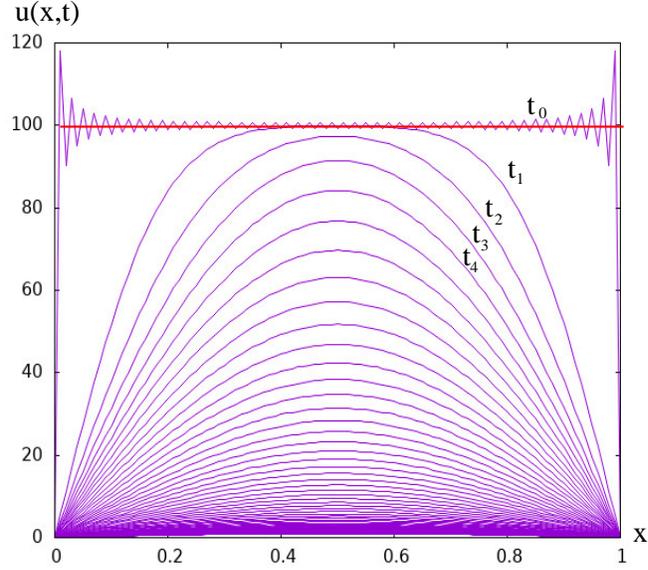


Fig. 7.2

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -L < x < L \quad t > 0 \\ u(-L, t) &= u(L, t) = 0 & t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(-L, 0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(L, 0) \\ u(x, 0) &= f(x) & -L < x < L \end{aligned} \quad (7.13)$$

El método de resolución que seguimos es exactamente igual al caso anterior usando separación de variables. Sin embargo, cuando resolvemos la ecuación diferencial ordinaria para  $\phi$ , debemos considerar las dos soluciones posibles,  $\phi_m^s = \text{sen}(\frac{\pi m}{L}x)$  y  $\phi_m^c = \text{cos}(\frac{\pi m}{L}x)$  para  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . De esta forma la solución general del problema es

$$u(x, t) = B_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A_m \text{sen}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) + B_m \text{cos}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \right) e^{-\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 kt} \quad (7.14)$$

Si la condición inicial, que debe ser una función periódica, esta debe escribirse así

$$f(x) = f_0^c + \sum_{m=1}^{\infty} \left( f_m^s \text{sen}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) + f_m^c \text{cos}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) \right)$$

por lo cual podemos asignar los valores de las constantes de  $u$  de la siguiente forma,  $A_m = f_m^s$  y  $B_m = f_m^c$  con  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$

## 7.6. Resolución de la ecuación de calor en dominios no acotados

En esta sección vamos a considerar los problemas de la ecuación de calor cuando el dominio es no acotado. Al igual que las ecuaciones elípticas con dominios no acotados, debemos usar otra herramienta diferente a la separación de variables para resolver el problema y esta es las transformaciones integrales, ya sea la transformada de Fourier o la de Laplace. En base a algunos ejemplos mostraremos como podemos aplicar dichas transformadas integrales para convertir la ecuación en derivadas parciales en una ecuación ordinaria.

Comenzaremos por el problema de difusión de calor o de contaminantes (sin viento) que describe la ecuación del calor con condiciones iniciales apropiadas.

Las condiciones de frontera e iniciales dependen de la aplicación específica.

Cuando se tiene una distribución inicial de temperatura  $T(x, 0) = h(x)$ , y las propiedades del medio son constantes, el problema por resolver es

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{K}{C_e \rho} T_{xx} & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ T(x, 0) &= h(x) & -\infty < x < \infty \end{aligned} \quad (7.15)$$

La solución se encuentra usando la transformada de Fourier  $\hat{T}$  de  $T$  que está dada de la siguiente forma

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{T}(k, t) dk,$$

y

$$\hat{T}(k, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} T(x, t) dx,$$

de tal forma que al substituir (7.6) en (7.15) y aprovechando las propiedades de la transformada de Fourier de la derivada obtenemos la siguiente ecuación diferencial ordinaria,

$$\hat{T}_t(k, t) = -Dk^2 \hat{T}, \quad \hat{T}(k, 0) = \hat{h}(k), \quad D = K/C_e \rho.$$

Resolviendo la ecuación para  $\hat{T}$ , cuya solución es  $\hat{T}(k, t) = e^{-Dk^2 t}$  y substituyendo en la integral tenemos

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}(k) e^{-Dk^2 t} e^{ikx} dk.$$

Es interesante observar que variaciones rápidas ( $k$  grande) se amortiguan rápidamente. Por otra parte las variaciones lentas lo hacen más despacio.

Utilizando el resultado de la transformada de Fourier de la gaussiana dado en el Apéndice A, vemos que  $e^{-Dk^2t} = \hat{f}(k, t)$  para  $f(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}$  de aquí que

$$T(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k, t) \hat{h}(k) dk.$$

Ahora aplicamos el teorema de convolución, también descrito en el Apéndice A, lo cual nos permite escribir la solución de esta forma

$$T(x, \tilde{t}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \tilde{t}}} \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi) e^{-(x-\xi)^2/4\tilde{t}} d\xi, \quad (7.16)$$

donde  $\tilde{t} = Dt$ .

Queda como un ejercicio para el lector invertir la transformada de Fourier de  $e^{-\alpha k^2}$  para comprobar esta fórmula. La inversión se hace usando la variable compleja con un contorno paralelo al eje real (Ver H. F. Weinberger [17]).

Si la función  $h(x)$  representa una excitación localizada al tiempo inicial,  $h(x) = \frac{1}{2\epsilon}$  si  $|x| \leq \epsilon$ ,  $h(x) = 0$  para  $|x| > \epsilon$ , tenemos que cuando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-x^2/4Dt}. \quad (7.17)$$

Vemos que  $T(x, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . El máximo se encuentra siempre en  $x = 0$ . La dispersión de la gaussiana es  $4Dt$  y se hace cada vez más grande conforme el tiempo pasa. Es interesante contrastar esta solución con la solución de la ecuación de onda. Las ondas se mueven al infinito con velocidad finita. El calor se difunde con una dispersión  $x^2 = 4Dt$ . El máximo inicial no se mueve. Podría pensarse a primera vista que las señales de calor se propagan con velocidad infinita ya que  $T(x, t) \neq 0$  para todos los valores de  $x$  en cuanto  $t > 0$ . Esto no es ninguna contradicción y se debe a nuestra hipótesis de “respuesta instantánea”: Flujo =  $-K \frac{\partial T}{\partial x}$ . Por otra parte la señal es exponencialmente pequeña si  $x^2 > 4Dt$ . En la aproximación de difusión sólo se toman en cuenta las escalas de relajación del material y no las de la inercia que darán una velocidad finita de propagación. El lector interesado podrá resolver el problema

$$\begin{aligned} \mu^2 u_{tt} + u_t &= D u_{xx}, \\ u(x, 0) &= h(x), \end{aligned}$$

tomar el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  y convencerse en detalle de que cuando la inercia  $\mu$  es pequeña el calor se difunde “sin sentir” la velocidad finita de propagación.

## 7.7. Unicidad de la solución de la ecuación de calor

Hemos obtenido una solución para la ecuación del calor pero no sabemos si ésta es única. Para estudiar la unicidad hay diferentes ideas. Aquí exploraremos el método de la entropía.

Consideremos la ecuación de calor

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & -\infty < x < \infty \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x) & -\infty < x < \infty\end{aligned}\tag{7.18}$$

Si tenemos dos soluciones de la ecuación del calor que decaen a cero en  $\pm\infty$  entonces su diferencia  $T(x, t) = u_2(x, t) - u_1(x, t)$  tiende a cero cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  al igual que  $T_x$ .

Entonces  $T$  satisface la ecuación

$$T_t = K T_{xx}, \quad T(x, 0) = 0 \quad -\infty < x < \infty.$$

La entropía del sistema está dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx$$

si es que  $T \geq 0$ . Supongamos que  $T > 0$ . (Físicamente la temperatura que es inicialmente cero absoluto no puede decrecer). El caso  $T < 0$  será tratado después.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_t}{1 + T} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K T_{xx}}{1 + T} dx \\ &= K \left( - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_x^2}{(1 + T)^2} dx \right) \leq 0.\end{aligned}$$

De aquí que la entropía es una función no negativa, no creciente y comienza en cero, por lo tanto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(1 + T) dx = 0 \quad \text{si } t > 0.$$

De donde  $T = 0$  si  $t > 0$  ya que si  $T > 0$  la integral sería distinta a cero.

Esta entropía es singular para  $T < 0$ . La misma idea puede usarse de otra forma. Considerando la ecuación

$$T_t = K T_{xx}$$

y multiplicando por  $T$  tenemos

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} T^2 = K T T_{xx}.$$

Integrando obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} T^2 dx = K \int_{-\infty}^{\infty} T T_{xx} dx = -K \int_{-\infty}^{\infty} T_x^2 dx < 0$$

de donde se sigue que  $T = 0$ . Esto prueba la unicidad de la solución.

## 7.8. Ecuación de calor con transporte y fuentes en dominios no acotados

En la sección 4 de este capítulo vimos que las ecuaciones de calor con términos de transporte y las que tienen fuentes pueden reducirse a la ecuación de calor simple, donde solo es necesario realizar un cambio de variables para lograr esto. Utilicemos estas técnicas para ver como resultan ser las soluciones de los problemas que planteamos al principio del capítulo cuando tenemos transporte de contaminantes y ecuaciones con fuentes.

Comencemos con el problema de difusión de contaminantes

$$C_t = DC_{xx} + UC_x, \quad C(x, 0) = h_\epsilon(x),$$

podemos hacer un cambio de variable  $x' = x - Ut$  y obtener la solución en la forma (7.17) cuando la condición inicial se vuelve una delta de Dirac. Así, el problema de difusión de contaminantes dado en (7.2) para  $x \in \mathbb{R}$  tiene como solución

$$C(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-(x-Ut)^2/4Dt}.$$

$x' = x - Ut$  Esta solución explica la formación de la pluma que los contaminantes producen al dispersarse en el aire. La zona contaminada es la zona donde la exponencial tiene un exponente menor que uno. De aquí que

$$(x - Ut)^2 = 4Dt$$

es la frontera de esta zona.

Las fronteras de la pluma son  $x = Ut \pm 2\sqrt{Dt}$ . En el plano  $(x, t)$  esta zona se muestra en la Fig. 7.3.

La Fig. 7.3 muestra cómo el viento transforma el contaminante con una velocidad media  $U$ . Además la difusión lo expande con una rapidez menor, lo cual da origen a la pluma.

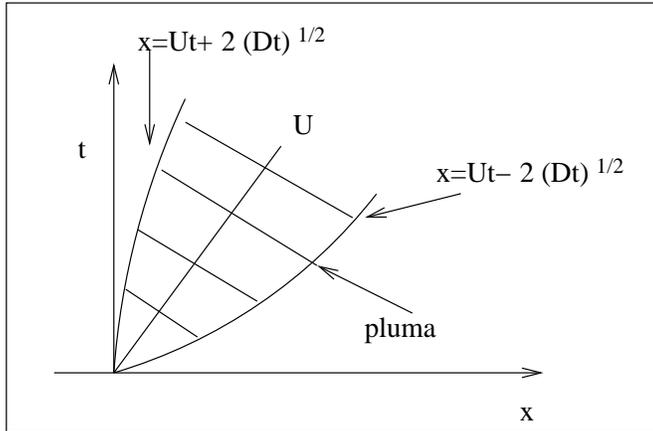


Fig. 7.3

Queda como un ejercicio para el lector el problema de hallar la pluma producida por una chimenea.

Consideramos ahora el problema en presencia de una fuente que depende de la temperatura. Consideramos pues la ecuación

$$T_t = DT_{xx} + \beta T, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

El caso  $\beta > 0$  es el problema de invasión a la zona  $x > 0$  de una inestabilidad  $T = 1$  localizada en la zona  $x < 0$ . En este caso la difusión alisa la discontinuidad provocando una perturbación en  $x > 0$  que es amplificada por  $\beta$  en la zona  $x > 0$ . Este proceso se repite y la inestabilidad avanza. Para encontrar la velocidad de avance cambiamos de variable  $T = e^{\beta t}v$  y obtenemos:

$$v_t = Dv_{xx}, \quad v(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

La solución está dada por la fórmula (7.16). En este caso tenemos:

$$v(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^0 e^{-(x-\xi)^2/4Dt} d\xi,$$

Cambiando variables  $\xi = x + u$  y luego regresando a la función original  $T$ , tenemos:

$$T(x, t) = \frac{e^{\beta t}}{2\sqrt{\pi Dt}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-u^2/4Dt} du.$$

Para estudiar el comportamiento de la función  $T(x, t)$  es más adecuado ver como evoluciona la derivada de  $T$  respecto a  $x$  pues esto no quita el problema de tener que integrar. Así calculamos

$$T_x(x, t) = -\frac{e^{\beta t - x^2/4Dt}}{2\sqrt{\pi Dt}}.$$

De la fórmula anterior podemos concluir que  $T_x$  es exponencialmente pequeña si  $x^2/4Dt \geq \beta t$ .

Integrando tenemos que

$$T(x, t) = -\int_x^\infty T_x dx$$

y concluimos que  $T(x, t)$  es exponencialmente chica para

$$x^2/4Dt \geq \beta t.$$

Por otra parte si  $x^2/4Dt \leq \beta t$  la solución crece. El punto  $x = 2\sqrt{D\beta t}$  separa estas dos regiones y representa un frente de inestabilidad que invade a la región de quietud. En la Fig. 7.4 tenemos que

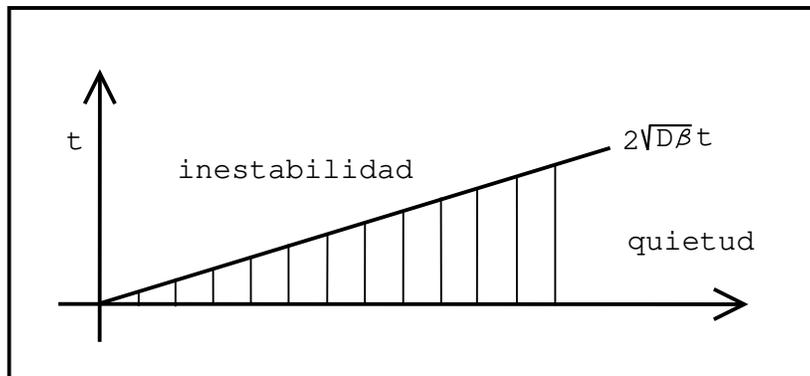


Fig. 7.4

Si a esta ecuación le añadimos un término de saturación  $-\beta T^2$ , obtenemos la ecuación de Fisher:

$$T_t = DT_{xx} + \beta T(1 - T)$$

La cual es una ecuación diferencial parabólica no lineal pero que es muy utilizada en la Biología Matemática.

## 7.9. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN DOMINIOS NO ACOTADOS USANDO LA TRANSFORMADA

La inestabilidad se satura en  $T = 1$  y obtenemos un frente que se propaga como una onda viajera tal como se muestra en la Fig. 7.5

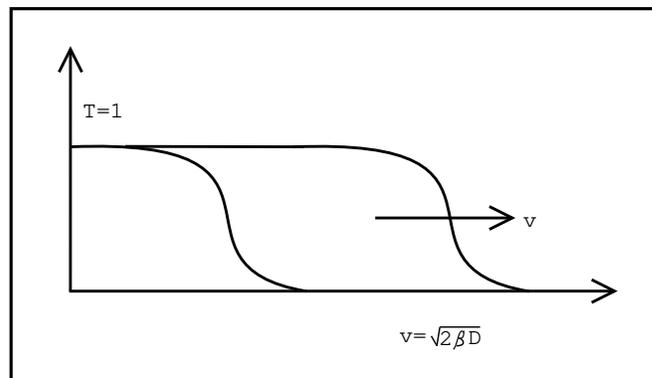


Fig. 7.5

Estos frentes se propagan con mayor velocidad cuando la razón  $\beta$  es grande y cuando la difusión es grande. Esto es de esperarse por la física del problema.

### 7.9. Resolución de la ecuación de calor en dominios no acotados usando la transformada de Laplace

En esta sección ejemplificaremos la manera de utilizar la transformada de Laplace para resolver un problema de una ecuación parabólica en un dominio no acotado. Para ello usaremos como ejemplo el caso de la propagación de una inyección de corriente en un cable pasivo.

Cuando vimos el problema del telegrafista en el capítulo 2, vimos como Heaviside estudió este problema para la transmisión interoceánica de las señales telegráficas. El caso del telégrafo es un caso de cable activo debido a que agregamos los efectos inductivos tal como lo vemos en la figura Fig. 2.2b, pero si eliminamos la inductancia,  $L = 0$  entonces obtenemos un cable pasivo, donde la ecuación que define su comportamiento es

$$v_{xx} - RC v_t - Gv = 0$$

donde  $R$  es la resistencia,  $C$  es la capacitancia que produce el cable respecto a la tierra física y  $G$  es la conductancia que hay a través del aislante del cable hacia el exterior, es decir, hacia la tierra física.

En este caso el estado  $v = 0$  es estable por tratarse de un circuito RC pasivo. La ecuación por resolver al simplificar las constante  $D = 1/(RC)$  y  $\beta = (G/C)$ , es:

$$\begin{aligned} v_t &= Dv_{xx} - \beta v, & x \geq 0, & t > 0, \\ v_x(0, t) &= h(t) = \text{pulso de corriente inyectado en } x = 0, \\ v(x, 0) &= 0, & v(x, t) \rightarrow 0, & x \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Resolveremos este problema tomando la transformada de Laplace (Apéndice B)  $\tilde{v}$  de  $v$  en  $t$  dado que  $t > 0$ . Así

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{st} \tilde{v}(s, x) ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \tilde{v}(s, x) ds. \end{aligned} \quad (7.20)$$

El contorno  $C$  se encuentra a la derecha de las singularidades de  $\tilde{v}$  como función de  $s$ . Al sustituir (7.20) en (7.19) podemos aplicar las reglas de la transformada de Laplace de la derivada de una función, donde obtenemos una ecuación diferencial ordinaria, esta ecuación para  $\tilde{v}(x, s)$  es

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{xx}(x, s) - \frac{(s + \beta)}{D} \tilde{v}(x, s) &= 0, & x \in \mathbb{R}, & s > 0, \\ \tilde{v}_x(0, s) &= \tilde{h}(s), & s > 0, \\ \tilde{v}(x, s) &\rightarrow 0, & \text{si } x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La solución es

$$\hat{v}(x, s) = A(s)e^{\sqrt{\frac{s+\beta}{D}} x} + B(s)e^{-\sqrt{\frac{s+\beta}{D}} x}.$$

El decaimiento para  $x \rightarrow \infty$  implica que  $A(s) = 0$  pues no queremos que  $\hat{v}$  explote. La condición inicial en  $x = 0$  implica  $\tilde{h}(s) = -\sqrt{(s + \beta)/D} B(s)$  donde  $\tilde{h}(s)$  es la transformada de Laplace de  $h(x)$ , así podemos substituir  $B(S)$  en la solución y obtener

## 7.9. RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR EN DOMINIOS NO ACOTADOS USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

la siguiente expresión

$$\tilde{v}(x, s) = -\sqrt{\frac{D}{s + \beta}} \tilde{h}(s) e^{-\sqrt{\frac{\beta+s}{D}}x}.$$

Ahora se tiene que invertir la transformada de Laplace para obtener  $v(x, t)$ . Como la condición inicial es un pulso unitario, entonces podemos representar a esta condición inicial  $h(x)$  como

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon}, & 0 < x < \epsilon, \\ 0, & x \geq \epsilon, \end{cases}$$

La transformada  $\tilde{h}(s)$  de un pulso unitario es  $\tilde{h}(s) = 1$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  pues dicho pulso tiende a una delta de Dirac. Con todo lo anterior, la solución de (7.19) está dada por:

$$\begin{aligned} v(x, t) &= \frac{-\sqrt{D}}{2\pi i} \int_c \frac{e^{-\frac{\sqrt{s+\beta}}{D}x} e^{st}}{\sqrt{s+\beta}} ds \\ &= \frac{\sqrt{D}e^{-\beta t}}{2\pi i} \int_{C'} e^{\frac{\sqrt{\sigma}x}{\sqrt{\sigma}} e^{\sigma t}} d\sigma \end{aligned} \quad (7.21)$$

pero se sabe que

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sigma}} e^{\sqrt{\sigma}|x-y|} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}$$

donde  $\mathcal{L}\{f\}$  representa la transformada de Laplace de  $f$ , lo cual implica

$$\begin{aligned} v(x, t) &= -\sqrt{D}e^{-\beta t} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x/\sqrt{D})^2/4t} \\ &= e^{-\beta t} \sqrt{\frac{D}{\pi t}} e^{-x^2/4Dt} \end{aligned}$$

La corriente a lo largo del cable es  $v_x$  y está dada por

$$v_x(x, t) = \frac{e^{-\beta t} x}{2\sqrt{D\pi t^3}} e^{-x^2/4Dt}$$

Vemos pues que la corriente decae con una amplitud  $e^{-\beta t}$  debido a las pérdidas resistivas. El máximo valor de la corriente está dada en el punto donde  $x(t)$  satisface

$$v_{xx}(x(t), t) = 0.$$

Obtenemos:  $x(t) = \sqrt{2Dt}$ .

El pulso de corriente viaja con velocidad  $\sqrt{2Dt}$ . Sin embargo la amplitud decrece y la señal se deteriora. Por esta razón las líneas de transmisión pasivas deben complementarse con elementos activos (amplificadores) que compensen el deterioro del pulso.

La naturaleza resuelve este problema en los axones (que conducen la corriente en el sistema nervioso) haciendo que  $\beta$  no sea constante sino que  $\beta$  dependa del voltaje de una manera apropiada. De hecho Hodgking y Huxley postularon un mecanismo de conducción activa haciendo precisamente depender  $\beta$  del voltaje. Se obtuvieron soluciones de esta ecuación no lineal con forma de ondas que viajan sin perder amplitud. Una vez obtenidas estas soluciones pudieron entender el mecanismo de membrana responsable de la conducción activa. Este descubrimiento fue fundamental y Hodgking y Huxley obtuvieron el premio Nobel ya que cambiaron nuestra comprensión de los procesos de comunicación entre los componentes del sistema nervioso [8].

### 7.10. Ecuación de calor en dimensiones superiores

Vamos a presentar ahora como se resuelve la ecuación de calor cuando la dimensión espacial es mayor a uno. Pongamos el caso de la siguiente ecuación parabólica o de calor,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = k \nabla^2 u(x, t) \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

Supongamos que  $\Omega$  es la bola de radio 1 centrada en el origen y que la condición de frontera es  $u(1, \theta, t) = 0$ . La condición inicial del problema es  $u(r, \theta, 0) = f(r, \theta)$ .

Escribiendo la ecuación de calor en coordenadas radiales obtenemos lo siguiente

$$k \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u(r, \theta, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, t)$$

Usemos el método de separación de variables por ser un problema acotado. Si  $u = Z(r, \theta)h(t)$  entonces al substituir  $u$  en la ecuación anterior obtenemos, después de hacer la separación de variables, las siguientes dos ecuaciones

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) Z(r, \theta) = -\lambda Z(r, \theta)$$

$$\frac{dh}{dt}(t) = -k\lambda h(t)$$

donde  $\lambda$  es una constante positiva.

### 7.11. Funciones tipo Green en dominios acotados

En las siguientes dos secciones vamos a tratar el problema de la función de Green en las ecuaciones parabólicas, aquí vamos a encontrar una diferencia con respecto a las ecuaciones elípticas debido a que una de las variables independientes, la que solemos usar como el tiempo, no aparecen segundas derivadas de respecto a estas variables. Esto nos lleva a que no tenemos simetría en el tiempo, de tal forma que la flecha del

tiempo está bien determinada en los problemas de calor. Así, deberemos distinguir aquellos procesos que evolucionan hacia el futuro o hacia el pasado.

Lo primero que vamos a hacer es presentar de manera explícita la función de Green con la que vamos a trabajar en dominios acotados. Luego desarrollaremos la teoría de Green para reformular las identidades de Green que nos han permitido obtener las soluciones.

Partamos de la solución general que encontramos para dominios acotados dada en la ecuación (7.11) y también consideremos la condición inicial  $f(x)$  que tenemos en (7.12). Es claro que al poner  $t = 0$  en (7.11) nos permite comparar esta expresión con (7.12), de tal forma que podemos concluir que  $a_m = f_m$ ,  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Los coeficientes  $f_m$  se determinan por la serie de Fourier de  $f(x)$  tal que

$$f_m = \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}\xi\right) d\xi$$

Si sustituimos estas  $f_m$  en (7.11) obtenemos que

$$u(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \left[ \frac{2}{L} \int_0^L f(\xi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}\xi\right) d\xi \right] e^{-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 t} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}x\right)$$

Cambiando de orden la suma con la integral tenemos

$$u(x, t) = \int_0^L f(\xi) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}\xi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) e^{-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 t} \right) d\xi$$

Donde podemos identificar a la función de Green con

$$G(x, t, \xi, 0) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{L} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}\xi\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi m}{L}x\right) e^{-k\left(\frac{\pi m}{L}\right)^2 t} \right) \quad (7.22)$$



# Apéndice A

## Transformada de Fourier

En esta sección explicaremos algunas de las propiedades de la transformada de Fourier que se han usado en el texto. Una exposición de estos resultados se puede encontrar en cualquier libro de análisis. Nuestra presentación sigue muy de cerca la del libro de Weinberger.

Empezaremos por recordar que la transformada de Fourier de una función  $f(x)$  (que supondremos lo suficientemente regular e integrable) se define como

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (\text{A.1})$$

Conociendo  $\hat{f}(k)$  se puede recuperar  $f(x)$  con la fórmula de inversión

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (\text{A.2})$$

Resulta de utilidad calcular la transformada de  $f'(x)$  en términos de la transformada de  $f(x)$ . Esto lo calculamos derivando (A.2) y obteniendo

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} ik \hat{f}(k) dk. \quad (\text{A.3})$$

Observamos que (A.3) nos muestra que  $f'(x)$  es la transformada inversa de  $ik\hat{f}(k)$ . Por esto, de (A.1) tenemos que la transformada de  $f'(x)$  es precisamente  $ik\hat{f}(k)$ . Se deja como un ejercicio el encontrar la transformada de la  $n$ -ésima derivada de  $f$  en términos de  $\hat{f}(k)$ . La fórmula (A.2) nos dice que cualquier función  $f(x)$  puede escribirse como una suma de ondas planas  $e^{ikx}\hat{f}(k)$ , cuya amplitud es  $\hat{f}(k)$  y el número de onda es  $k$ . Análogamente se puede definir la transformada de Fourier para funciones de tres variables. Esto se hace aplicando (A.1) a cada variable separadamente. La transformada

de Fourier es una función de tres variables (del vector  $\mathbf{k}$ ) y se define de la siguiente manera:

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.4})$$

Si aplicamos a (A.4) la transformada inversa variable por variable tenemos:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.5})$$

Queda como un ejercicio para el lector obtener en detalle (A.5).

Probaremos ahora las identidades que usamos para calcular la transformada de Fourier de  $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ .

En primer lugar observemos que

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \\ \nabla_{\mathbf{x}}^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} &= \nabla \cdot \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \nabla \cdot i\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para calcular la transformada de  $\nabla^2 f$  procedemos por analogía con (A.3) y usando (A.5) tenemos que

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}$$

y debido a (A.6)

$$\nabla^2 f = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} -\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (\text{A.7})$$

De (A.7) vemos que la transformada de  $\nabla^2 f$  es  $-|k|^2 \hat{f}(\mathbf{k})$ . (Compárese esta fórmula con la correspondiente para la segunda derivada de funciones de una sola variable).

Finalmente discutiremos el teorema de la convolución para transformadas de Fourier. Recordemos que la convolución de dos funciones denotada por  $f * g$ , se define como

$$(f * g)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x} - \xi) g(\xi) d\xi. \quad (\text{A.8})$$

Queremos ahora expresar la transformada de  $f * g$  en términos de  $\hat{f}$  y  $\hat{g}$ . Para esto, de (A.8) calculamos la transformada de  $f * g$  de manera que

$$(f * g)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x} - \xi) g(\xi) d\xi \right\} d\mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

Cambiando de variable  $\mathbf{x} = \xi + \eta$  tenemos de (A.9)

$$\begin{aligned} (f * g)(\mathbf{k}) &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi - i\mathbf{k}\cdot\eta} \int_{\mathbb{R}^3} f(\eta) g(\xi) d\xi d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\xi} g(\xi) d\xi \int_{\mathbb{R}^3} e^{-i\mathbf{k}\cdot\eta} f(\eta) d\eta \\ &= \hat{f}(\mathbf{k}) \hat{g}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Vemos que (A.10) nos dice que la transformada de la convolución de dos funciones es el producto de las transformadas de dichas funciones. Este resultado, útil al calcular transformadas inversas, fue utilizado en varias ocasiones en este texto.

Calculamos ahora una transformación útil que es la de la función gaussiana:

$$f(x) = Ae^{-x^2/G^2}, \quad G > 0.$$

Podemos normalizar (por conveniencia posterior) esta función escogiendo  $A$  para que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2 dx = 1 \quad \text{o sea} \quad A^2 = \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x^2/G^2} dx \right)^{-1}.$$

Ahora tomando  $x = \eta \frac{G}{\sqrt{2}}$  tenemos que:

$$A^2 = \left[ \frac{G}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right]^{-1} = \left[ \frac{G}{\sqrt{2}} \sqrt{\pi} \right]^{-1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}G}.$$

La función buscada es  $f(x) = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4}G^{1/2}} e^{-x^2/G^2}$ . El ancho de  $f$  es aproximadamente  $G$  y su máximo es  $A = \frac{2^{1/4}}{\pi^{1/4}G^{1/2}}$ . Si  $G \rightarrow 0$  se torna cada vez más angosto y más alto en  $x = 0$ . El área total de  $f^2$  se mantiene igual a uno.

La transformada de Fourier de  $f(x)$  se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/G^2} e^{-ikx} dx.$$

Completamos el cuadrado en el exponente y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{G^2} + i kx &= (x/G + ikG/2)^2 + k^2G^2/4 \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx &= A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{G} + i\frac{kG}{2})^2} e^{-k^2G^2/4} dx \\ &= Ae^{-k^2G^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x/G + i\frac{k}{2}G)^2} dx \\ &= AGe^{-k^2G^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + i\frac{kG}{2})^2} dx \end{aligned}$$

Esta última integral se calcula deformando el contorno (sea por Stokes o por Cauchy) al eje real. Usando cualquiera de las interpretaciones tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x + i\frac{kG}{2})^2} dx = \int_{\mathcal{L}} e^{-z^2} dz$$

donde  $\mathcal{L}$  es la línea paralela al eje real que tiene parte imaginaria  $i\frac{kG}{2}$  y se muestra en la figura A.1

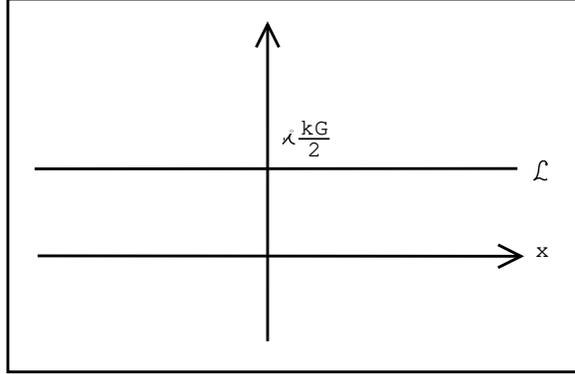


Fig. A.1

Truncando el contorno  $\mathcal{L}'$  a la región  $-L \leq x \leq L$ , tenemos que  $\int_Q e^{-z^2} dz = 0$  donde  $Q$  es la curva que une los segmentos  $\mathcal{L}'$ ,  $C$ ,  $(-L, L)$  y  $D$  en dirección contraria al reloj. De aquí que:

$$\int_{\mathcal{L}'} e^{-z^2} dz = \int_{-L}^{+L} e^{-x^2} dx + \int_D e^{-z^2} dz + \int_C e^{-z^2} dz.$$

Tomando el límite cuando  $L \rightarrow \infty$  observamos que las integrales sobre los contornos  $C$  y  $D$  van a cero. Tenemos así que la integral buscada es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Tenemos que la transformada de Fourier está dada por:

$$AG\sqrt{\pi}e^{-k^2G^2/4} = (2\pi)^{1/4}G^{1/2}e^{-k^2G^2/4}.$$

Es la misma gaussiana con  $G$  colocada multiplicando a la variable  $k$ . Esto indica que una función muy concentrada ( $G \rightarrow 0$ ) tiene una transformada de Fourier muy extendida. También si tomamos  $1/G^2 = \frac{G^2}{4}$  tenemos que  $G^4 = 4$ ,  $G = \sqrt{2}$ . En este caso vemos que

$$f(x) = \pi^{-1/4}e^{-x^2/2} \quad \text{y} \quad \hat{f}(k) = \pi^{1/4}\sqrt{2}e^{-k^2/2}$$

es decir,  $\pi^{1/4}f(x)$  es función propia de la transformada de Fourier con valor propio  $\sqrt{2\pi}$ . Si normalizamos la transformada de Fourier para que preserve el producto escalar hay que dividir  $\hat{f}(k)$  por  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Así queda que la gaussiana es función propia de la

transformada de Fourier con valor propio 1. Queda como un ejercicio interesante para el lector verificar que solo hay 4 valores propios que son  $1, -1, i, -i$ . Cada valor propio tiene infinitas funciones propias y ellas son las funciones de Hermite. Este resultado se obtiene derivando con respecto a  $G$  y manteniendo la calma en el cálculo. También usando la función generatriz de los polinomios de Hermite.



# Apéndice B

## Transformada de Laplace

En la sección anterior vimos que para calcular la transformada de Fourier de una función necesitábamos que ésta fuera integrable. Sin embargo, en muchas ocasiones es conveniente representar una función no necesariamente acotada, en términos de exponenciales. Esto se es posible usando la transformada de Laplace.

Un tratamiento muy bueno del tema y gran cantidad de aplicaciones se pueden encontrar en el libro de Van der Pol y Bremmer [14]. Nosotros nos limitaremos a discutir las propiedades más simples, siguiendo muy de cerca el libro de Weinberger [15]. Empezamos recordando que la transformada de Laplace de una función  $f(t)$  (suficientemente regular) definida para  $t \geq 0$  y acotada en la forma

$$|f(t)| \leq Me^{Kt}, \quad t \geq 0, \quad K > 0, \quad M > 0 \quad (\text{A.1})$$

se define como

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (\text{A.2})$$

En (A.1) y (A.2) vemos que la integral que define a  $\tilde{f}(s)$  existe para  $Re\{s\} > K$  y como en esa región, dicha integral converge uniformemente, define también una función analítica de  $s$  para  $Re\{s\} > K$ . La región de definición de  $\tilde{f}(s)$  se muestra en la Fig. B.1.

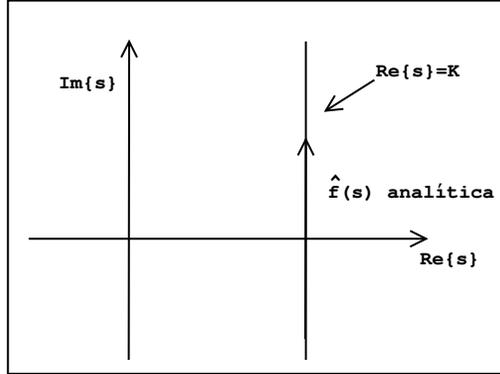


Fig. B.1

Además cuando  $Re\{s\} \rightarrow \infty$ ,  $Re\{s\} > K$  tenemos de (A.1) y (A.2) que  $|\tilde{f}(s)| \leq \frac{D}{|s|}$ . Así mismo, para  $Re\{s\} < K$  la integral (A.2) deja de existir, pero en general  $\tilde{f}(s)$  tiene una continuación analítica para  $Re\{s\} < K$  con polos y puntos rama. Dichas continuaciones analíticas deben determinarse en cada caso particular. Queda como ejercicio el calcular las transformadas de  $t$ ,  $e^t$ ,  $\cos t$ , y localizar sus singularidades en el plano  $s$ .

El siguiente paso es expresar a  $f(t)$  en términos de  $\tilde{f}(s)$ . Para esto observamos que si  $s = c + ik$  con  $c > K$  y  $k$  real, entonces (A.2) se puede escribir como

$$\hat{g}(k) = \tilde{f}(s) = \tilde{f}(c + ik) = \int_0^{\infty} e^{-ct} f(t) e^{-ikt} dt. \quad (\text{A.3})$$

La ecuación (A.3) nos muestra que  $\hat{g}(k) = \tilde{f}(c + ik)$  es la transformada de Fourier de la función

$$g(t) = \begin{cases} e^{-ct} f(t), & t \geq 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Usando (A.3) y la fórmula de inversión (A.2), podemos expresar a  $g(t)$  en términos de  $\hat{g}(k)$  en la forma

$$g(t) = e^{-ct} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \hat{g}(k) dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikt} \tilde{f}(c + ik) dk. \quad (\text{A.4})$$

Multiplicando la (A.4) por  $e^{ct}$  obtenemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(c+ik)t} \tilde{f}(c + ik) i dk. \quad (\text{A.5})$$

(A.5) es la representación paramétrica de

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{L}} e^{st} \tilde{f}(s) ds \quad (\text{A.6})$$

donde  $\mathcal{L}$  es la línea (paralela al eje imaginario  $Re\{s\} = c$ ). Se puede verificar que (A.6) es independiente de la curva  $\mathcal{L}$  siempre que ésta se tome dentro de la región de analiticidad de  $\tilde{f}(s)$ . Por esto podemos escribir (A.6) en la forma

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} e^{st} \tilde{f}(s) ds$$

donde  $\mathcal{C}$  es cualquier curva paralela al eje imaginario que está a la izquierda de todas las singularidades de  $\tilde{f}(s)$ . Queda como ejercicio comprobar (A.6) para las funciones  $t$ ,  $\cos t$ ,  $e^t$ .

Resulta también conveniente expresar la transformada de Laplace de  $f'(t)$  en términos de la transformada de  $f(t)$ . Tenemos en este caso que

$$\tilde{f}'(s) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

de donde se sigue que  $\tilde{f}'(s) = s\tilde{f}(s) - f(0)$ .

Se deja al lector calcular  $f''$  en términos de  $\tilde{f}$ .

Como última propiedad de la transformada de Laplace, debemos mencionar el teorema de convolución análogo al de las transformadas de Fourier. Para las funciones definidas en el intervalo  $0 \leq t < \infty$ , la convolución apropiada está definida como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \eta) g(\eta) d\eta, \quad t \geq 0. \quad (\text{A.7})$$

Calculando la transformada de Laplace de (A.7) tenemos que

$$\begin{aligned} (\tilde{f} * g)(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \int_0^t f(t - \eta) g(\eta) d\eta dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ \int_{\eta}^{\infty} e^{-st} f(t - \eta) dt \right\} g(\eta) d\eta \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s\eta} \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt g(\eta) d\eta = \tilde{f}(s) \tilde{g}(s). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

La ecuación (A.8) nos da la expresión de la transformada de

$$\int_0^t g(\eta) d\eta \quad (\text{A.9})$$

en términos de  $\tilde{g}(s)$ , ya que basta observar que

$$\int_0^t g(\eta) d\eta = (1 * g)(t)$$

de donde se sigue que  $(1 * g) \sim (s) = \tilde{1} \tilde{g}(s) = \frac{\tilde{g}(s)}{s}$ .

Esta identidad se usó en el texto al discutir las soluciones a la ecuación de onda.



# Notas

Capítulo I. El ejemplo de flujo de coches y la correspondiente discusión están tomadas de *Linear and Nonlinear Waves* de G. B. Whitham (John Wiley). La exposición de características sigue de cerca los libros de *Partial Differential Equations* de Copson (Cambridge Univ. Press) y *Partial Differential Equations* de Weinberger (Ginn Blaisdell). Una referencia útil es el libro *Partial Differential Equations* de Petrovski. Las pruebas de unicidad están tomadas del Vol. II del libro *Methods of Mathematical Physics* de Courant -Hilbert (Interscience).

Capítulo II. La presentación sigue muy de cerca las notas *Mathematical Methods in Electromagnetism* de Friedrichs (New York University), aunque los desarrollos se dan en este texto con mayor detalle. La discusión del problema de olas en agua es muy cercano a la del libro *Water Waves* de Stoker (Interscience). También la exposición sobre las ecuaciones de Maxwell, sigue de cerca las notas de Friedrichs. Más referencias sobre sistemas hiperbólicos se encuentran en el Vol. II del libro de Courant-Hilbert. Para la teoría más moderna, las notas de J. Ize y las referencias que ahí se mencionan. Para muy variadas aplicaciones de sistemas hiperbólicos el libro *Shock Waves* de Courant-Friedrichs (Interscience) y *Linear and Nonlinear Waves* de Whitham.

Capítulo III. Es un capítulo muy corto. La presentación es esencialmente la de Weinberger. Para una discusión elemental pero detallada del problema de Sturm-Liouville y sus aplicaciones a Ecuaciones Diferenciales Parciales puede consultarse el libro *Fourier Series and Boundary Value Problems* de R. V. Churchill (Mc. Graw Hill). En la parte de separación de variables, los libros de Tikhonov y Samarski traen una discusión más avanzada y resuelven problemas interesantes. Son recomendables para una segunda lectura. Para una introducción a los métodos de Teoría del Potencial en Ecuaciones Elípticas, que nosotros omitimos, puede consultarse el libro de Copson. Finalmente una introducción a la teoría más moderna de Ecuaciones Elípticas puede encontrarse en las notas de J. Ize. Para una discusión detallada y muy bien escrita del problema de radiación, referimos al libro *Water Waves* de Stoker.

Capítulo IV. La parte referente a la ecuación de segundo orden sigue el Weinberger y

la de sistemas las notas de Friedrichs. Sólo que los casos se hacen con mayor detalle. Para Transformadas de Laplace y sus aplicaciones referimos al tratado *The Laplace Transform* de Van der Pol y Bremmer. También al Vol. II de Courant-Hilbert en la sección: *Transient problems and operational calculus*. Una referencia elemental es el libro *Operational Mathematics* de R. V. Churchill (Mc. Graw Hill). Muchas aplicaciones a propagación de ondas de la transformada de Laplace están en *Mathematical Methods of Physics* de H. B. Jeffreys (Cambridge Univ. Press).

Capítulo V. En la obtención de la fórmula de Poisson para el problema no homogéneo se sigue de cerca el Courant-Hilbert Vol. II. Un tratamiento extensivo de este tema aunque muy avanzado está en *Sound Pulses* de Friedlander (Cambridge Univ. Press). La discusión del problema con valores iniciales sigue el Weinberger y Courant-Hilbert. Discusiones interesantes sobre la ecuación de onda con el método de potenciales de Rietz lo tiene Copson. Métodos alternativos como promedios esféricos y transformada de Radon están discutidos brevemente en Courant-Hilbert Vol. II. Ahí se dan muchas referencias sobre este tema.

Finalmente una referencia muy útil aunque más avanzada es el libro *Partial Differential Equations* de F. John (Springer Verlag), tiene gran parte del material tratado en estas notas y se recomienda como una segunda lectura.

Capítulo VI. En este capítulo se ilustraron algunos mecanismos de capa límite, convección e inestabilidad de frente de difusión. La lista de problemas es más bien representativa de la forma de atacar problemas de propagación de frentes difusivos que es un campo de interés muy actual.

# Bibliografía



# Bibliografía

- [1] Churchill, R.V. and Brown, J.W, Fourier Series and Boundary Value Problems. 3 ed. New York, McGraw Hill, 1978.
- [2] Copson, E.T, Partial Differential Equations. Cambridge, University, 1975.
- [3] Courant, R. and Hilbert, D., Methods of Mathematical Physics. New York, Interscience Publishers, 1962.
- [4] Courant, R. and Friedrichs K.O., Shock Waves. New York, 1962.
- [5] Feynman, R.P., Leighton, R. B and Sands, M. L. Feynman lectures on Physics. V.II: Mainly Electromagnetism and Matter. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1964.
- [6] Friedlander, F. G., Sound Pulses. Cambridge, University, 1971.
- [7] Friedrichs, K. O., Mathematical Methods in Electromagnetism. Class Notes, New York University.
- [8] Flores Gallegos, Gilberto, Modelos de Conducción de Impulsos Eléctricos en Nervios. Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Vol. 87, 1994, págs. 223-262.
- [9] Ize, J. Las ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones. Teoría de existencia para ecuaciones en derivadas parciales. México. IIMAS, 1978 (Comunicaciones Técnicas, Serie Verde, No. 10).
- [10] Jefreys, H.B. Mathematical Methods of Physics. Cambridge, University, 1946.
- [11] John, F., Partial Differential Equations. New York, Springer Verlag, 1971.
- [12] Maxwell, J. C. Treatise on Electricity and Magnetism. New York, Dover, 1954.
- [13] Petrovski, I. G. Partial Differential Equations. Philadelphia, W.B. Saunders, 1967.

- [14] Tikhonov, A. N. and Samarski, A. A. Partial Differential Equations of Mathematical Physics. San Francisco, Holden-Day, 1964.
- [15] Tyn Myint-U. Partial Differential Equation of Mathematical Physics. Second Edition. North Holland 1980.
- [16] Van der Pol, B. and Bremmer, H. Operational Calculus based on the two-sided Laplace Integral. 2 ed. Cambridge, University, 1955.
- [17] Weinberger, H. F. A first course in Partial Differential Equations. Waltham, Blaisdell, 1965.
- [18] Whitham, G. B., Linear and Nonlinear Waves. New York, J. Wiley, 1974.