ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tarea 6 Semestre 2024-2 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $W : E \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2. Considerar el sistema

$$\dot{x} = -\nabla W(x).$$

A un sistema de este tipo se le llama sistema gradiente.

(a) Demostrar que el sistema no puede tener órbitas periódicas. (Sugerencia : Suponga que existe una órbita periódica de período $T > 0$ y considere el cambio $\Delta W = W(x(T)) - W(x(0))$, a lo largo de la órbita).

(b) Sea p^* un mínimo local de W tal que existe una vecindad $\mathcal{U}$ de p^* tal que si $p \neq p^*$ y $p \in \mathcal{U}$ entonces $\nabla W(p) \neq 0$. Demostrar que p^* es asintóticamente estable probando que $V : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ dada por $V(p) = W(p) - W(p^*)$ es una función de Lyapunov.

(c) Sea A una matriz invertible de $n \times n$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Demostrar que si $E = \mathbb{R}^n$ y $W : E \to \mathbb{R}$ es la función dada por

$$W(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2 ,$$

entonces W satisface las hipótesis de la parte (a) con $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$ y $p^* = -A^{-1}b$. Concluir que para cualquier condición inicial el flujo generado por la ecuación

$$\dot{x} = A^T(b - Ax)$$

converge a p^*.

Ejercicio 2.

Considere la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + x^2 - x^4 = 0.$$

(a) Escribir la ecuación como un sistema de dos ecuaciones de primer orden para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(b) Encontrar una integral primera del sistema.

(c) Encontrar todos los puntos de equilibrio del sistema y clasificarlos según su estabilidad.

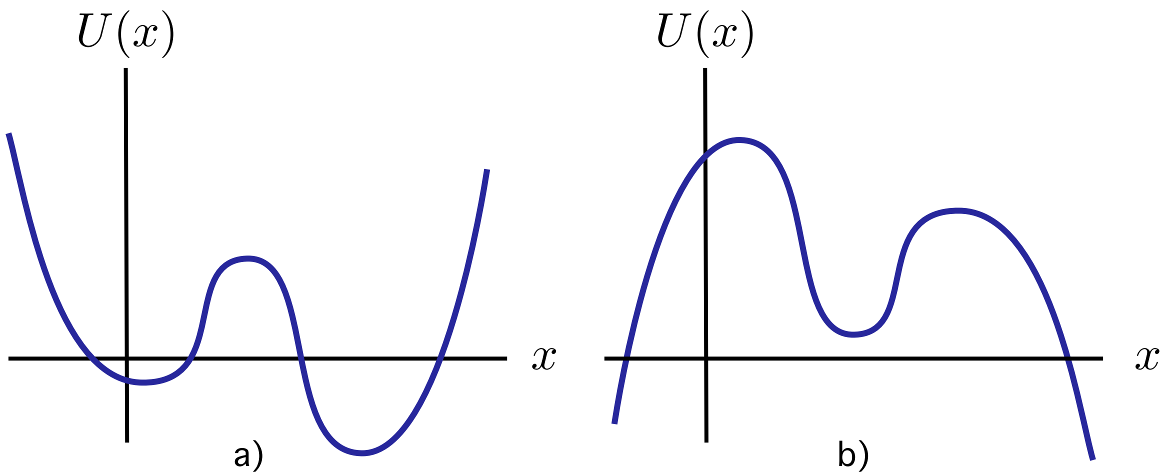
(d) Demostrar que $(x, y) = (1, 0)$ es un punto de equilibrio hiperbólico ¿Qué valor debe tener y_0 de forma que $(0, y_0) \in W^u(1, 0)$? Misma pregunta para $W^s(1, 0)$.

(e) Haga un dibujo cuidadoso del plano de fases.

Ejercicio 3. Considerar el sistema Hamiltoniano definido por

$$H(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

donde $U(x)$ tiene la forma dada en la figura. Para cada gráfica de U, dibujar cualitativamente el espacio fase del sistema.



Ejercicio 4. Probar que el sistema

$$\dot{x} = x - y - x^3, \quad \dot{y} = x + y - y^3, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

Tiene una única órbita periódica atractora en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. (Esto quiere decir que, para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\xi \neq 0$, $\phi(t;\xi)$ converge a una órbita periódica.)