ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tarea 4 Semestre 2024-2 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto que contiene al origen. Muestre que si F es un campo vectorial en E de clase C^1 tal que $F(0) = 0$ y $DF(0) = 0$ entonces, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in B_\delta(0)$, entonces

$$|F(x) - F(y)| < \varepsilon |x - y|.$$

Ayuda : Utilice el siguiente resultado : para cualquier $\delta > 0$, existe $\xi \in B_\delta(0)$ tal que

$$|F(x) - F(y)| < ||DF(\xi)|||x - y|,$$

para toda $x, y \in B_\delta(0)$.

Ejercicio 2. Considerar el sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ donde

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_2 - 4x_1^3 + 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Demostrar que $(0, -1)$ es un punto de equilibrio y encontrar el sistema lineal asociado $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

(b) Demostrar que $(0, -1)$ es un equilibrio hiperbólico.

(c) Encontrar explícitamente el flujo del sistema no-lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ y del sistema lineal $\dot{\mathbf{y}} = A\mathbf{y}$.

(d) Sea $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función dada por

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1^3 + 1 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que la función $\mathbf{h}$ es una conjugación que hace topológicamente equivalentes a los dos flujos calculados en la parte (c).

Ejercicio 3. Usar la función de Lyapunov $V(x, y) = x^2 + y^2$ para demostrar que el origen es un punto asintóticamente estable para el siguiente sistema.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - x^3 - xy^2 \\ x - y^3 - yx^2 \end{pmatrix}.$$

¿Qué dice la teoría lineal?

Ejercicio 4. Encontrar y clasificar como atractor, repulsor ó puntos silla topológico los puntos de equilibrio del sistema no-lineal $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ en $\mathbb{R}^2$ donde

(a) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x_1 - x_1x_2, x_2 - x_1^2)$.

(b) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (-4x_2 + 2x_1x_2 - 8, 4x_2^2 - x_1^2)$.

(c) $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (2x_1 - 2x_1x_2, 2x_2 - x_1^2 + x_2^2)$.

Ejercicio 5. Considerar el sistema mecánico conservativo

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -U'(x),$$

donde $U(x) = -x^4 + 4x^2$.

(a) Dibujar con detalle el plano de fases del sistema.

(b) Encontrar y clasificar de acuerdo a su estabilidad todos los puntos críticos del sistema.

(c) Para cada punto crítico hiperbólico encontrado en la parte (b), dar fórmulas explícitas para las variedades estable e inestable.

(d) Sea $\phi(t,(x,y))$ el flujo definido por el sistema. ¿Bajo que condiciones para y se cumple que $\phi(t,(0,y))$ es acotado para todo $t \in \mathbb{R}$?