Tarea 3

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Semestre 2024-2 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Suponga que $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T periódica. Encuentre el multiplicador de Floquet, un exponente de Floquet y la forma normal de Floquet para las soluciones de $\dot{x} = a(t)x$.

Ejercicio 2.

(a) Encuentre la solución fundamental principal $\Phi(t)$ en $t = 0$ del siguiente sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \quad A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\sin t\cos t \\ -1 - \frac{3}{2}\sin t\cos t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

Ayuda : una solución está dada por $x(t) = e^{t/2}(\cos t, -\sin t)$.

(b) ¿Cuál es el periodo de $A(t)$? Demuestra que la solución fundamental Dar la forma normal de Floquet real y compleja de $\Phi(t)$.

(c) Especifique el valor de los multiplicadores y los exponentes de Floquet.

Ejercicio 3.

(a) Encuentre una matriz (posiblemente compleja) B y una matriz real R tales que $e^B = C$ y $e^R = C^2$ donde

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Calcule e^{tB} y e^{tR} para las matrices encontradas en el inciso anterior.

(c) Suponga que el sistema lineal 2×2

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A(t+T) = A(t), \quad T > 0,$$

tiene una solución fundamental $\Phi(t)$ con la propiedad de que $\Phi(0)^{-1}\Phi(T) = C$ ¿La solución cero es estable? ¿inestable? Demuestre su afirmación.

Ejercicio 4. Encuentre una matriz real R tal que $e^R = C$ donde

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5. Demuestre que la solución cero del sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \cos t & 12 \\ 147 & \frac{3}{2} + \sin t \end{pmatrix}.$$

es inestable.

Ejercicio 6. Considere el sistema

$$\dot{x} = A(t)x, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} -2\cos^2 t & -1 - \sin 2t \\ 1 - \sin 2t & -2\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

(a) Muestre que $\Phi(t)$ dada por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{-2t}\cos t & 3e^{-2t}\cos t - \sin t \\ 2e^{-2t}\sin t & 3e^{-2t}\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

es una solución fundamental.

(b) Encuentre la forma normal de Floquet compleja y real de $\Phi(t)$. La solución cero, ¿es estable? ¿asintóticamente estable? Explique.

(c) Resuelva el siguiente problema de valores iniciales

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 7. Encuentre la solución al problema de valores iniciales

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8.

(a) Encuentre la solución al oscilador armónico forzado

$$\ddot{x} + x = f(t)$$

con condiciones iniciales $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$.

(b) Discuta en detalle el caso en que $f(t) = \sin(\omega t)$ ¿Son las soluciones acotadas?