**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS**

**Tarea 2** Semestre 2024-2 Prof. Renato Calleja

**Ejercicio 1.** Sean $A$ una matriz real $n\times n$ con entradas $a_{ij}$. Definimos

$$||A|| = \sup\left\{\frac{||Ax||}{||x||}\ :\ x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0\right\}.$$

(a) Demuestre que para cualesquiera matrices $A, B$ se tiene

$$||AB|| \leq ||A||||B||, \qquad ||A^k|| \leq ||A||^k.$$

(b) Demuestre que

$$\max_j \sum_{i=1}^n a_{ij}^2 \leq ||A||^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2.$$

(c) Sean $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ dos sucesiones de matrices que convergen a $A_0$ y $B_0$ respecto de la norma $||\cdot||$ (y por lo tanto respecto de cualquier norma matricial). Muestre que la sucesión $\{A_nB_n\}$ converge a $A_0B_0$.

**Ejercicio 2.**
Considere el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ con la topología generada por la norma

$$\|A\| = \sup_{|v|=1}|Av|.$$

(a) Probar que el conjunto de matrices con $n$ valores propios distintos es abierto.

(b) Sea $B$ un bloque de Jordan $m\times m$, lo que implica que $B=\lambda I+N$ donde $N$ es nilpotente de orden $m$. Encuentre una matriz $Q$ tal que $Q^{-1}BQ=\lambda I+\epsilon N$. Explique porque esto implica que, para cualquier matriz $A$, cualesquiera 1's en la diagonal superior de su forma canónica de Jordan pueden hacerse arbitrariamente pequeños. ¿Implica esto que existe otra matriz $\tilde{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ arbitrariamente cercana a $A$ que es diagonalizable?

**Ejercicio 3.** Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \qquad x(0) = x_0, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

usando la forma canónica de Jordan de $A$ y la exponencial matricial $e^{At}$.

**Ejercicio 4.**

(1) Suponga que $A$ es una matriz $n\times n$ tal que $A^2=I$. Encontrar una fórmula explícita para $e^{tA}$.

(2) Repita el ejercicio si $A$ satisface $A^2=-I$ y si $A^2=A$.

(3) Resuelva

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 8 & -12\\ 1 & -2 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 1 & -2\end{pmatrix}x, \qquad x(0) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 5.** Considere la EDO

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{\epsilon} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad 0 < \epsilon \ll 1.$$

Muestre que dado $M > 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que el sistema anterior tiene una solución $x(t)$ con la propiedad de que $|x(0)| = 1$ pero $|x(1/2)| > M$. Esto muestra que, a pesar de que todas las soluciones se aproximan a cero exponencialmente, existen intervalos de tiempo donde algunas soluciones tienen un crecimiento significativo.

**Ejercicio 6.** Encuentre una función matricial $t \to A(t)$ tal que

$$t \to \exp\left(\int_0^t A(s)\mathrm{d}s\right)$$

no sea una solución matricial del sistema $\dot{x} = A(t)x$. Muestre que la fórmula anterior siempre es una solución en el caso escalar. ¿Cuándo es una solución en el caso matricial?

**Ejercicio 7.** Sea $\omega \in \mathbb{R}^3$. Considere la EDO en $\mathbb{R}^3$

$$\dot{x} = x \times \omega$$

donde $\times$ denota el producto vectorial.

Encuentre el flujo y describa la dinámica cualitativamente.

Ayuda : Primero haga el caso en que $\omega$ es paralelo a uno de los ejes coordenados. Para el caso general use un cambio ortogonal lineal de coordenadas.