ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Tarea 1 Semestre 2024-2 Prof. Renato Calleja

Ejercicio 1. Sea T una transformación de un espacio de Banach en sí mísmo. Probar que la condición

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y), \qquad \text{para } (x \neq y)$$

no es suficiente para la existencia de una punto fijo de T.

Ejercicio 2.

(a) Encontrar la solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{(y+2)e^y - 2x}.$$

(Ayuda : recuerde lo que es una “ecuación exacta”.)

(b) Explique cual es la diferencia entre resolver la ecuación anterior y resolver el siguiente sistema :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x - (2+y)e^y \\ \frac{dy}{dt} &= -y\end{aligned}$$

(No es necesario resolver el sistema.)

Ejercicio 3. Suponga que $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave, positiva y periódica de periodo $p > 0$.

(a) Muestre que si $x(t)$ es solución de $\dot{x} = F(x)$ y

$$T := \int_0^p \frac{1}{F(y)}\, dy,$$

entonces $x(t+T) - x(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. (Ayuda : considere $G(x) = \int_c^x (1/F(y))\, dy$ ¿Qué puede decir de la función $g(y) = G(y+p) - G(y)$ y del valor de $G(x(b)) - G(x(a))$?)

(b) ¿Podemos llegar a la misma conclusión si F cambia de signo ?

Ejercicio 4.

(a) Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, \lambda) = |x| + |\lambda|.$$

Muestre que f es de Lipschitz con respecto a (x, λ) ¿Qué conclusiones puede obtener sobre las soluciones del siguiente problema de valores iniciales ?

$$\dot{x} = f(x, \lambda), \qquad x(0) = x_0$$

(b) Encontrar el flujo $\phi(t, x, \lambda)$ de la EDO

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

y verifique que se satisfacen las propiedades de suavidad para $\phi(t, x, \lambda)$ predichas por el Teorema de Existencia y Unicidad.

Ejercicio 5. Sea $\Phi : J \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función dada por

$$\Phi(t, x) = \frac{e^t x}{(e^t - 1)x + 1}.$$

(1) Demostrar que Φ es flujo.

(2) Para cada $x \in \mathbb{R}$ encontrar el intervalo maximal $D(x)$.

(3) Encontrar una ecuación diferencial satisfecha por $y(t) = \Phi(t, x)$.

(4) Calcular $\lim_{t\to\infty} \Phi(t, x)$ y $\lim_{t\to-\infty} \Phi(t, x)$.