

# Métodos numéricos en Teoría KAM por el método de la parametrización

Integración mediante Series de Taylor

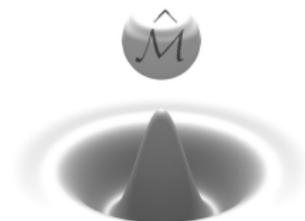
Renato Calleja y Pedro Porras

Departamento de Matemáticas y Mécanica  
Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas  
Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM)

14 de diciembre de 2023

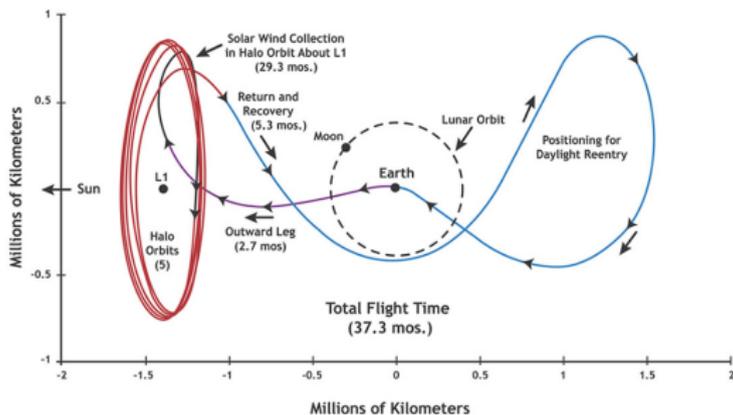


- 1 Motivación
- 2 Método de Taylor
- 3 Método de Integración de Taylor
- 4 TaylorIntegration



# Misiones espaciales

En el diseño misiones espaciales, la precisión en la navegación y el control es vital. Los integradores numéricos robustos, como el de Taylor, son esenciales para planificar y ejecutar misiones con éxito, asegurando que las naves sigan rutas específicas con máxima precisión.

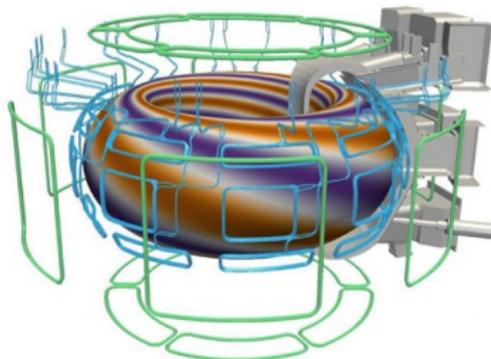


Fuente: <https://en.wikipedia.org/wiki/Genesis>

**Figure:** La trayectoria y el plan de vuelo de la misión Génesis. Fue diseñada para estudiar el viento solar y recoger muestras de partículas solares.

# Tokamaks

En los modelos de líneas de campo magnético de Tokamaks, que describen la trayectoria de partículas cargadas dentro del dispositivo, desempeñando un papel crucial en el cálculo de las barreras de confinamiento del plasma.



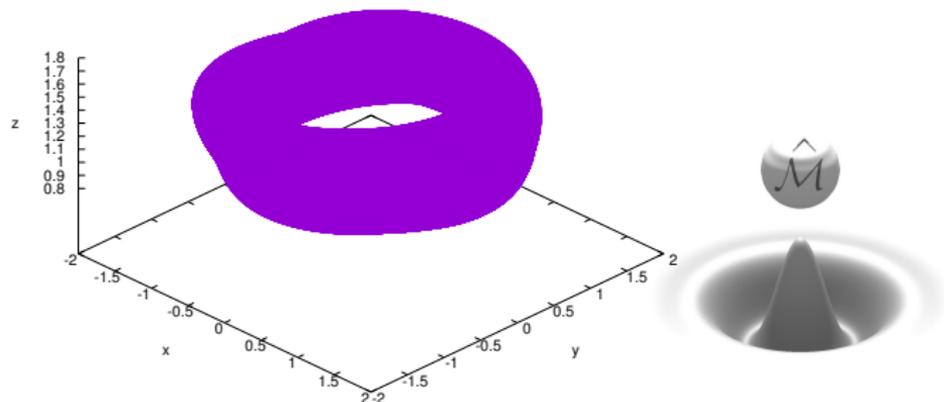
Fuente: <https://www.iter.org/>

**Figure:** Las bobinas de corrección de ITER: bobinas ohmicas interiores (color azul claro) y bobinas superconductoras externas (color verde claro).



# Método de Taylor en los métodos KAM

En nuestra investigación, y dada la naturaleza de los métodos KAM que estamos desarrollando, **empleamos el integrador de Taylor para calcular una variedad aproximadamente invariante que sirven como semilla para el método KAM.** Este enfoque nos permite demostrar y calcular la existencia de estos objetos invariantes.



# Método de Taylor con un ejemplo

La idea del método de Taylor es construir, una solución local, en  $t$ , que aproxime lo mejor posible la solución de la ecuación diferencial.

$$\dot{x} = x^2, \quad \text{con } x(0) = x_0 = 3.$$

En alguna vecindad del punto inicial  $x(t_0)$ . En particular, escribimos la solución como una serie de Taylor alrededor de  $t_0$  de la siguiente forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_{[k]}(t - t_0)^k,$$

donde  $x_{[k]} = x_{[k]}(t_0) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \Big|_{t_0}$ , es el coeficiente de Taylor normalizado de orden  $k$  evaluado en  $t_0$ .



# Solución a primer orden

Comencemos por escribir la aproximación de primer orden para la solución:

$$x(t) = x(t_0 + \delta_t) = x_{[0]} + x_{[1]}\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2) = x_0 + x_{[1]}\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2).$$

El objetivo es encontrar el valor de  $x_{[1]}$  de manera que se satisfaga la ecuación diferencial.

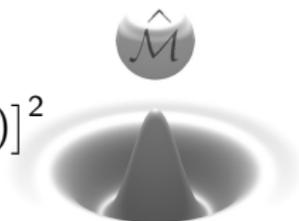
Al derivar ambos lados con respecto a  $\delta_t$ , obtenemos

$$\dot{x} = x_{[1]} + \mathcal{O}(\delta_t).$$

Sustituyendo esto en la ecuación diferencial, tenemos:

$$\begin{aligned} x_{[1]} + \mathcal{O}(\delta_t) &= [x_0 + x_{[1]}\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2)]^2 \\ &= x_0^2 + \mathcal{O}(\delta_t). \end{aligned}$$

De aquí concluimos que  $x_{[1]} = x_0^2$ .



# Solución a segundo orden

Continuando con el proceso, para la aproximación de segundo orden, escribimos:

$$\begin{aligned}x(t_0 + \delta_t) &= x_0 + x_{[1]}\delta_t + x_{[2]}\delta_t^2 + \mathcal{O}(\delta_t^3) \\ &= x_0 + x_0^2\delta_t + x_{[2]}\delta_t^2 + \mathcal{O}(\delta_t^3).\end{aligned}$$

Donde hemos sustituido  $x_{[1]} = x_0^2$ , y buscamos obtener  $x_{[2]}$ . Nuevamente, derivamos la expresión; en este caso, la derivada es:

$$\dot{x} = x_0^2 + 2x_{[2]}\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2),$$

sustituyendo nuevamente en la ecuación diferencial, obtenemos!

$$\begin{aligned}x_0^2 + 2x_{[2]}\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2) &= [x_0 + x_0^2\delta_t + x_{[2]}\delta_t^2 + \mathcal{O}(\delta_t^3)]^2 \\ &= x_0^2 + 2x_0^3\delta_t + \mathcal{O}(\delta_t^2).\end{aligned}$$

De aquí, concluimos que  $x_{[2]}(t_0) = x_0^3$ .

# Solución a órdenes superiores

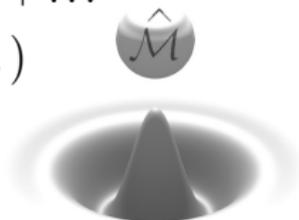
Para órdenes más altos, se sigue el mismo procedimiento. Por ejemplo, para el siguiente orden:

$$x(t_0 + \delta_t) = x_0 + x_0^2 \delta_t + x_0^3 \delta_t^2 + x_{[3]} \delta_t^3 + \mathcal{O}(\delta_t^4),$$

Al derivar y sustituir en  $x^2$ , se obtiene  $x_{[3]} = x_0^4$ . Este proceso se repite sucesivamente para órdenes superiores.

Finalmente, hemos obtenido

$$\begin{aligned} x(t_0 + \delta_t) &= x_0 + x_0^2 \delta_t + x_0^3 \delta_t^2 + x_0^4 \delta_t^3 + \dots \\ &= x_0 (1 + x_0 \delta_t + x_0^2 \delta_t^2 + \dots) \\ &= \frac{x_0}{1 - x_0 \delta_t}. \end{aligned}$$



El resultado obtenido es idéntico al obtenido de forma analítica.

# Método de Integración de Taylor

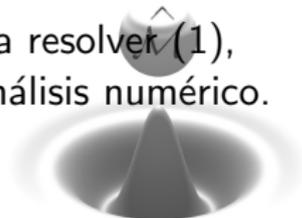
Antes veamos algunas observaciones:

- Consideremos el problema de encontrar una función suave  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(a) = x_0, \quad (1)$$

donde  $f : [a, b] \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función suave, y  $m \geq 1$ .

- Un resultado clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias que asegura la existencia y unicidad de una función  $x(t)$ , definida en  $[a, b_0] \subset [a, b]$ , que cumple con la ecuación (1).
- La búsqueda de métodos numéricos eficaces para resolver (1), constituye uno de los problemas clásicos en el análisis numérico.



# Método de Taylor

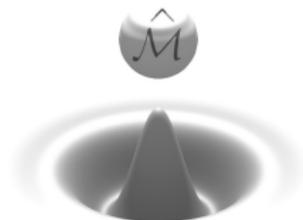
Puesto que  $x(t)$  es suave, su serie de Taylor alrededor  $t_0$ , es:

$$x(t) = x_{[0]} + x_{[1]}\delta_t + x_{[2]}\delta_t^2 + \cdots + x_{[k]}\delta_t^k + \cdots \quad (2)$$

Ahora derivando (2)

$$\dot{x}(t) = x_{[1]} + 2x_{[2]}\delta_t + \cdots + (k+1)x_{[k+1]}\delta_t^k + \cdots \quad (3)$$

donde  $x_{[n]} = \left. \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} x(t) \right|_{t_0}$



# Método de Taylor

Ahora, si expandimos en serie de Taylor el lado derecho de la Ec. (1),

$$f(t) = f_{[0]} + f_{[1]}\delta_t + f_{[2]}\delta_t^2 + \cdots + f_{[k]}\delta_t^k + \cdots \quad (4)$$

Si comparamos las ecuaciones (3) y (4) obtenemos una recurrencia para los coeficientes

## Coefficientes para el integrador de Taylor

$$x_{[k+1]} = \frac{(f \circ x)_{[k]}}{k+1}, \text{ para } k > 0 \quad (5)$$



# Paso de integración

Al implementar un método como el de Taylor, es necesario truncar la serie de hasta un orden  $p$ . De manera formal, podemos escribirlo de la siguiente manera:

$$x(t_0 + \delta_t) = \sum_{k=0}^p x_{[k]} \delta_t^k + \mathcal{R}_p,$$

donde el término residuo  $\mathcal{R}_p$  se define como:

$$\mathcal{R}_p = x_{[p+1]}(\xi) \delta_t^{p+1},$$

donde,  $\xi$  es un valor en el intervalo  $[t_0, t_0 + \delta_t]$ .

Nuestro objetivo es truncar la serie en un valor  $p$  suficientemente grande de manera que el residuo sea pequeño.



# Paso de integración

Para calcular el paso de integración consideremos lo siguiente:

- Si tomamos un valor lo suficientemente grande para  $p$ , estaremos en la región de convergencia de la serie, lo que significa que las correcciones sucesivas serán cada vez más pequeñas, ya que la serie converge. Esto se basa en el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales.
- En particular, cuando  $p$  es lo suficientemente grande, tendremos la siguiente desigualdad:

$$|x_{[p]} \delta_t^p| \leq \epsilon,$$

aquí,  $\epsilon$  es una cota suficientemente pequeña para todos los términos sucesivos



# Paso de integración

- De aquí obtenemos una cota para el paso de integración  $\delta_t = t - t_0$ ,

$$\delta_t = t - t_0 \leq \left( \frac{\epsilon}{|x_{[p]}(t_0)|} \right)^{1/p}.$$

- La idea es, entonces, elegir  $\epsilon$  para que sea mucho menor que el valor del redondeo de la máquina.
- El paso de integración debe ser menor que el valor que aparece en el lado derecho de la desigualdad.
- Al valor que elijamos lo llamaremos  $h$ , y depende de  $t_0$ .
- Por esto, al calcular la evolución temporal, distintos pasos de integración se irán obteniendo, por lo que el paso de integración en general no será constante.



# La suma de la serie

Una vez que hemos determinado el paso de integración  $h$ , queremos calcular la nueva condición inicial  $x(t_1)$ , con  $t_1 = t_0 + h$  sumando la serie correspondiente. Para esto, utilizamos el método de Horner:

$$\begin{aligned}x(t_1) &= x_0 + x_{[1]} h + \cdots + x_{[p-1]} h^{p-1} + x_{[p]} h^p \\&= x_0 + x_{[1]} h + \cdots + h^{p-1}(x_{[p-1]} + hx_{[p]}) \\&= x_0 + x_{[1]} h + \cdots + h^{p-2}(x_{[p-2]} + h(x_{[p-1]} + hx_{[p]})) \\&= x_0 + h(x_{[1]} + h(\dots + h(x_{[p-1]} + hx_{[p]}))\dots).\end{aligned}$$

De esta manera, la expresión original se ha reorganizado en una forma más conveniente, donde cada término se multiplica por un factor de  $h$  y se acumula de manera recursiva. Esto se logra mediante la factorización y agrupación adecuada de los términos, lo cual facilita el cálculo numérico y minimiza la cantidad de operaciones requeridas.

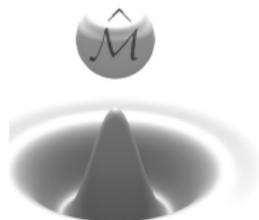
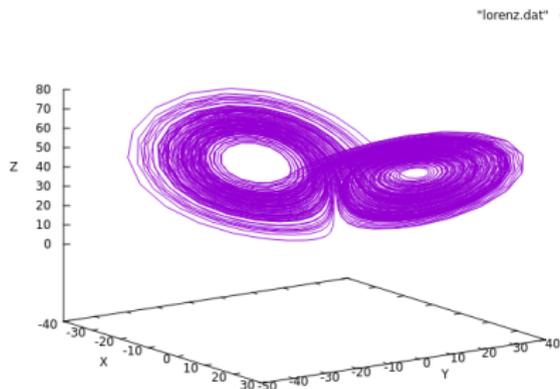
# Ejemplo: Ecuaciones de Lorenz

Las ecuaciones de Lorenz son un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales, derivadas de las ecuaciones simplificadas de rollos de convección de la atmósfera terrestre.

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$



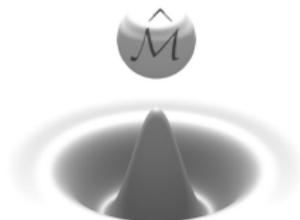
# Ejemplo

Supongamos que conocemos  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  para algún  $t \in \mathbb{R}$ . Queremos calcular  $x(t+h)$ ,  $y(t+h)$ ,  $z(t+h)$ , donde  $h$  es un paso apropiado, utilizando la serie de Taylor de orden  $N$ , para  $u = (x, y, z)$ .

$$u(t+h) = u(t) + u'(t)h + \frac{u''(t)h^2}{2!} + \dots + \frac{u^{(N)}(t)h^N}{N!} = \sum_{k=0}^N \frac{u^{(k)}(t)h^k}{k!}$$

La serie de Taylor puede expresarse como:

$$u(t+h) = \sum_{k=0}^N u_{[k]} h^k$$



Vamos a ver cómo calcular  $x_{[k]}(t)$  para  $k \geq 1$ :

$$x_{[1]} = \sigma(y_{[0]} - x_{[0]})$$

$$x_{[2]} = \frac{\sigma^2}{2}(y_{[1]} - x_{[1]})$$

$$x_{[3]} = \frac{\sigma^3}{6}(y_{[2]} - x_{[2]})$$

$\vdots$

$$x_{[k]} = \frac{\sigma^k}{k!}(y_{[k-1]} - x_{[k-1]})$$

Luego, podemos encontrar  $x_{[k]}(t)$  recursivamente a partir de:  
 $x_{[0]}, \dots, x_{[k-1]}$  e  $y_{[0]}, \dots, y_{[k-1]}$ .

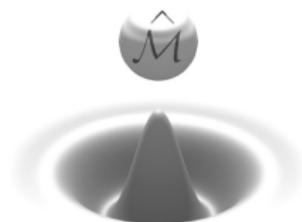


De la misma manera, calcularemos la diferenciación automática de  $y(t)$  y  $z(t)$ .

$$\begin{cases} x_{[k]}(t) = \frac{\sigma^k}{k!} (y_{[k-1]} - x_{[k-1]}) \\ y_{[k]}(t) = \frac{1}{k} (\rho x_{[k-1]} - y_{[k-1]} - (xz)_{[k-1]}) \\ z_{[k]}(t) = \frac{1}{k} (-\beta z_{[k-1]} + (xy)_{[k-1]}) \end{cases}$$

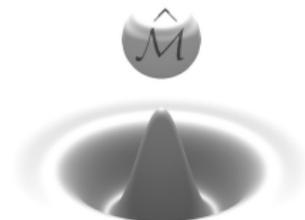
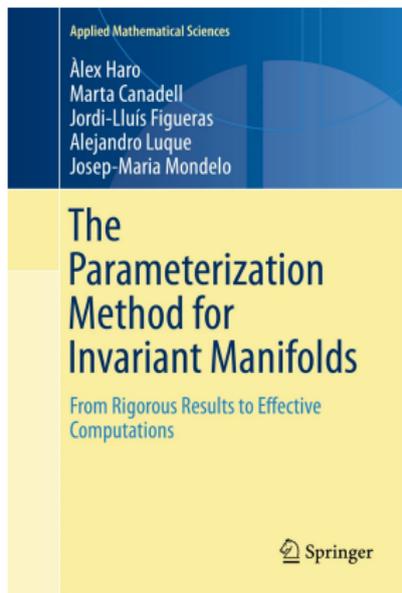
Entonces, sólo falta saber cómo calcular  $(xz)^{[k-1]}$ , es decir;

$$(x \cdot y)_{[k]}(t) = \sum_{j=0}^k x_{[j]} \cdot y_{[k-j]}$$



# Manipulador álgebraico

A continuación, se presenta una tabla que recopila las reglas de recursión más relevantes, extraída del libro "The parameterization method for invariant manifolds", [Haro et al., 2016]



- El método de integración de Taylor es una herramienta eficaz para integrar Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODEs) en casos donde las funciones son suficientemente suaves.
- Permite alcanzar una precisión que se compara con los errores de redondeo por cada paso de tiempo.
- Se construye una aproximación de alto orden de la solución mediante el método de Taylor, asegurando que el error asociado sea muy pequeño.
- Se establece un paso de tiempo que garantiza la validez de la serie de Taylor.
- Este paso de tiempo se utiliza para sumar la expansión de Taylor, obteniendo así una aproximación de la solución en un momento posterior.

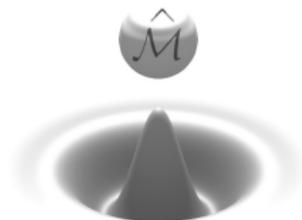


# Desarrollos del método de Taylor

Existen diversos desarrollos del método de integración de Taylor. Estoy familiarizado con dos implementaciones:

- Taylor, desarrollado en C++ por Ángel Jorba y Maorong Zou.
- TaylorIntegration, en Julia, desarrollada por Jorge Pérez y Luis Benet.

A continuación, nos enfocaremos en explorar la implementación "TaylorIntegration" [Pérez-Hernández and Benet, 2019].



# Problema de Kepler

El problema de Kepler estudia el movimiento de dos cuerpos bajo su atracción gravitatoria mutua. En coordenadas del centro de masa y relativas, se reduce al movimiento de una partícula de masa  $m$ , atraída por otra en el origen de masa  $M$ . Las ecuaciones de movimiento en coordenadas cartesianas son:

$$\dot{x} = v_x,$$

$$\dot{y} = v_y,$$

$$\dot{v}_x = -\frac{GMx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},$$

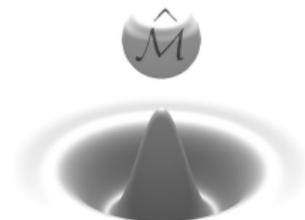
$$\dot{v}_y = -\frac{GMy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$



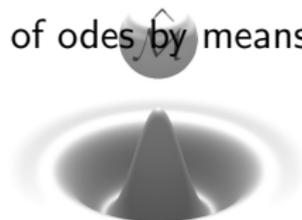
Para concretar, fijamos  $GM = 1$ . Las coordenadas  $x$  e  $y$  son las coordenadas relativas (al centro de masa) de la partícula, y  $v_x$  y  $v_y$  son su velocidad.

# ¡Gracias!

**¡Gracias por su atención!**



-  Griffiths, D. F. and Higham, D. J. (2010).  
*Numerical methods for ordinary differential equations: initial value problems*, volume 5.  
Springer.
-  Haro, A., Canadell, M., Figueras, J.-L., Luque, A., and Mondelo, J.-M. (2016).  
The parameterization method for invariant manifolds.  
*Applied mathematical sciences*, 195.
-  Jorba, À. and Zou, M. (2005).  
A software package for the numerical integration of odes by means of high-order taylor methods.  
*Experimental Mathematics*, 14(1):99–117.



 Pérez-Hernández, J. A. and Benet, L. (2019).

PerezHz/TaylorIntegration.jl: TaylorIntegration v0.4.1.

