Método de Parametrización para Variedades Invariantes en DDEs

18 de Marzo de 2021

Preliminares

Una ecuación diferencial autónoma con retardo discreto está dada por la ecuación diferencial funcional

$$\dot{u}(t) = F(u_t) \tag{1}$$

donde

- $F : \mathcal{C}_{n,\tau} \to \mathbb{R}^n$,
- $\tau > 0$ el mayor de los retardos,
- $u_t(\theta) = u(t+\theta)$ para $\theta \in [-\tau, 0]$.

Una reformulación de (1) sobre el espacio de Banach

$$\mathcal{BC}_{n,\tau} = \{\psi = \varphi + X_0\xi : \varphi \in \mathcal{C}_{n,\tau},\ \xi \in \mathbb{R}^n\} \simeq \mathbb{R}^n \times \mathcal{C}_{n,\tau}$$

$$X_0(\theta) = \begin{cases} Id_n, & \theta = 0 \\ 0, & \theta \in [-\tau, 0). \end{cases}$$

$$||\psi||_{\mathcal{BC}_{n,\tau}} = ||\varphi||_\infty + |\xi|$$

permite un estudio similar a la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias (ver [S. Guo et al., 2013] y [J. K. Hale et al., 1993]).

Ejemplos

Ecuación de Wright

$$x'(t) = -\beta x(t-1)[1 + x(t)], \quad \beta > 0$$

Ecuación cúbica de Ikeda

$$x'(t) = \beta \left(x(t-1) - x^3(t-1) \right), \quad \beta > 0$$

Sistema artificial de dos neuronas

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t) + b \tanh(x(t-\tau)) + a_{12} \tanh(y(t-\tau_1)), \\ \dot{y}(t) = -y(t) + b \tanh(y(t-\tau)) + a_{21} \tanh(x(t-\tau_2)), \end{cases}$$

Ecuación ϵ-perturbada de Wright dependiente del estado

$$x'(t) = -\beta x(t-1+\epsilon x(t)) - \beta x(t)x(t-1), \quad \beta > 0$$

Ejemplos

Ecuación de Wright

$$F(\xi,\varphi) = -\beta\varphi(-1)(1+\xi)$$

Ecuación cúbica de Ikeda

$$F(\xi,\varphi) = \beta\left(\varphi(-1) - \varphi^3(-1)\right)$$

Sistema artificial de dos neuronas

$$F(\xi,\varphi) = \begin{pmatrix} -\xi_1 + b\tanh(\varphi_1(-\tau)) + a_{12}\tanh(\varphi_2(-\tau_1)) \\ -\xi_2 + b\tanh(\varphi_2(-\tau)) + a_{21}\tanh(\varphi_1(-\tau_2)) \end{pmatrix}$$

Ecuación ϵ-perturbada de Wright dependiente del estado

$$F(\xi,\varphi) = -\beta\varphi(-1+\epsilon\xi) - \beta\xi\varphi(-1)$$

Es posible reescribir (1) como una ecuación diferencial ordinaria sobre

$$\mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau} = \{\varphi + X_0\xi \in \mathcal{BC}_{1,\tau} : \varphi(0) = \xi\}$$

de la forma

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

donde $\mathcal{U} = (\xi, \varphi)$, $\mathcal{F}(\xi, \varphi) = \begin{pmatrix} F(\xi, \varphi) \\ \frac{d}{d\theta}\varphi \end{pmatrix}$ con $\xi = u(t)$ y $\varphi = U_t$. (ver [J. D. Mireles James et al, 2017])

Los eigenvalores de la linealización de (1) forman un conjunto infinito numerable cuya distribucion se refleja en el hecho de que dado cualquier real ρ, hay un número finito de eigenvalores λ tales que $\Re(\lambda) \geq \rho$.

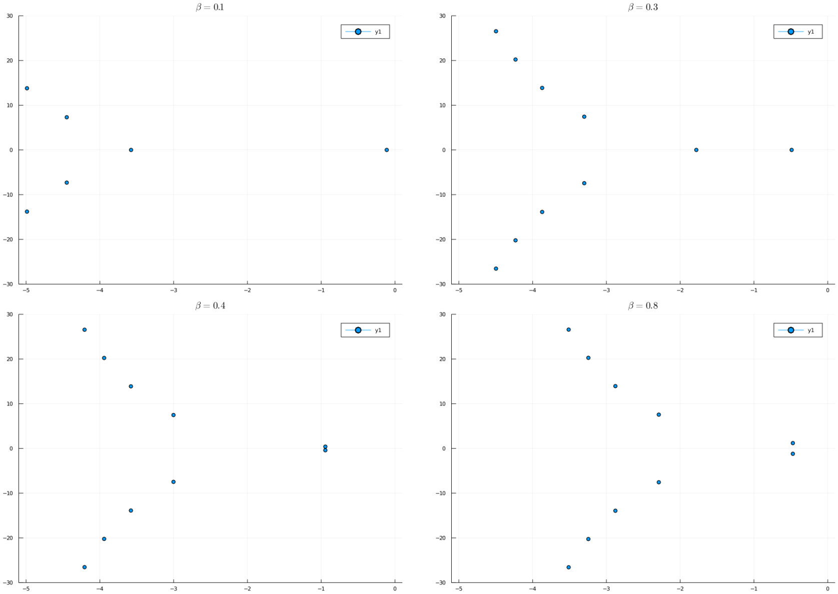


Figura: Distribución de los eigenvalores de la ecuación de Wright.

Método de la parametrización para variedades locales inestables

Sea u^0 un equilibrio hiperbólico de (1) con flujo ϕ. Consideremos $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ eigenvalores inestables de $DF\left(u^0\right)$ de multiplicidad 1 con $\xi_1, \ldots, \xi_m$ sus eigenvectores asociados y B^m la bola abierta unitaria en $\mathbb{R}^m$ (o en su caso $\mathbb{C}^m$)

Mapeo conjugante

Decimos que un mapeo suave $\mathcal{P} : B^m \to \mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$ es un mapeo conjugante para $W^u_{loc}(u^0)$ si

$$\mathcal{P}(0) = u^0, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma_j}\mathcal{P}(0) = \xi_j, \quad j \in \{1, \ldots, m\} \tag{2}$$

y

$$\phi(\mathcal{P}(\sigma_1, \ldots, \sigma_m), t) = \mathcal{P}(e^{\lambda_1 t}\sigma_1, \ldots, e^{\lambda_m t}\sigma_m)$$

para todo $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)^T \in B$ y $t \geq 0$ que satisfaga $\left(e^{\lambda_1 t}\sigma_1, \ldots, e^{\lambda_m t}\sigma_m\right)^T \in B^m$

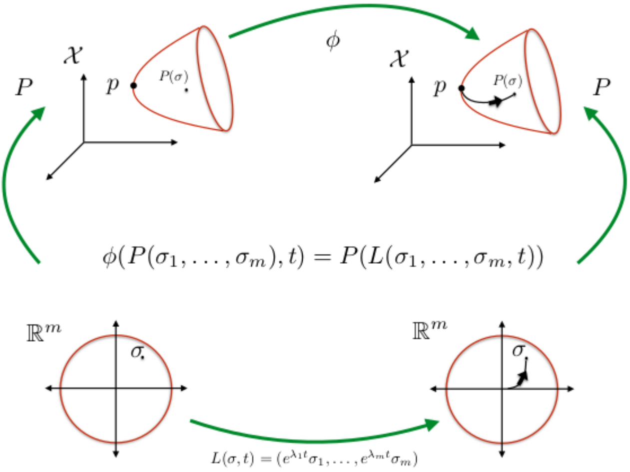


Figura: El mapeo $\mathcal{P}$ conjuga la dinámica de la variedad inestable del flujo lineal generado por los eigenvalores inestables (imagen tomada de [J. D. Mireles James et al, 2017])

La imagen de $\mathcal{P}$ es una variedad local inestable

Si $\mathcal{P}$ es un mapeo conjugante, entonces la imagen de $\mathcal{P}$ es una variedad local inestable del equilibrio u^0.

Ecuación de invarianza

Supongamos que $\mathcal{P} : B^m \to \mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$ satisface la condición (2) y

$$F(\mathcal{P}(\sigma)) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sigma_j \frac{\partial}{\partial \sigma_j} \mathcal{P}(\sigma) \tag{3}$$

para toda $\sigma \in B^m$, entonces $\mathcal{P}$ es un mapeo conjugante.

Notación

Si

$$\Lambda = diag\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_m\right)$$

entonces la ecuación de invarianza (3) es equivalente a

$$F(\mathcal{P}(\sigma)) = D\mathcal{P}(\sigma)\Lambda\sigma. \tag{4}$$

¿ Qué pasos sigo para calcular la variedad inestable local del equilibrio $\mathcal{U}^0$?

Debemos conocer $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ eigenvalores inestables de $D\mathcal{F}\left(\mathcal{U}^0\right)$ de multiplicidad 1.

En consecuencia se deben conocer los eigenvectores asociados, que son de la forma $\left(\xi_1, \xi_1 e^{\lambda_1 \bullet}\right)^T, \ldots, \left(\xi_m, \xi_m e^{\lambda_m \bullet}\right)^T \in \mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$.

Se asume $\mathcal{P}$ analítica y entonces desarrollándola en serie de potencias

$$\mathcal{P}(\sigma) = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} \mathcal{P}_\gamma \sigma^\gamma, \qquad \mathcal{P}_\gamma \in \mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$$

donde $\mathcal{P} = (p, P)^T \in \mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$, con $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{N}^m$, $|\gamma| = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$.

Se puede ver también que

$$\mathcal{P}_\gamma = (p_\gamma, P_\gamma)^T$$

El significado de $D\mathcal{P}\Lambda\sigma$, usando (3) corresponde a

$$D\mathcal{P}(\sigma)\Lambda\sigma = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} (\lambda \cdot \gamma)\sigma^\gamma \mathcal{P}_\gamma$$

De acuedo a la ecuación de invarianza (4)

$$\begin{pmatrix} F(p(\sigma), P(\sigma)) \\ \frac{d}{ds} P(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dp(\sigma)\Lambda\sigma \\ DP(\sigma)\Lambda\sigma \end{pmatrix} \tag{5}$$

De la segunda componente se deduce que para cada γ

$$\frac{d}{ds}P_\gamma(s) = (\lambda \cdot \gamma)P_\gamma(s)$$

cuya solución es

$$P_\gamma(s) = P_\gamma(0)e^{(\lambda\cdot\gamma)s}$$

Usando el hecho que buscamos $\mathcal{P}$ en $\mathcal{BC}^{cl}_{1,\tau}$

$$P_\gamma(s) = p_\gamma e^{(\lambda\cdot\gamma)s}$$

Por lo que resolver la ecuación de invarianza (5) es equivalente a hallar todos los coefficientes $p_\gamma \in \mathbb{C}$ tales que

$$F\left(\sum_{|\gamma|=0}^{\infty} p_\gamma \sigma^\gamma, \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} p_\gamma e^{(\lambda\cdot\gamma)\bullet}\sigma^\gamma\right) = \sum_{|\gamma|=0}^{\infty}(\lambda\cdot\gamma)p_\gamma\sigma^\gamma \qquad (6)$$

Ejemplo: variedad inestable 2-dimensional para la ecuación de Wright

$$x'(t) = -\beta x_t(-1)[1 + x_t(0)]$$

Consideremos el equilibrio $u^0 = 0$. Los eigenvalores satisfacen

$$\lambda + \beta e^{-\lambda} = 0$$

Para $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{5\pi}{2}$ el equilibrio posee exactamente dos eigenvalores inestables (complejos conjugados) $\lambda = (\lambda_-, \lambda_+)$. Notemos que

$$F\left(\sum_{|\gamma|=0}^{\infty} p_\gamma \sigma^\gamma, \sum_{|\gamma|=0}^{\infty} p_\gamma e^{(\lambda\cdot\gamma)\bullet} \sigma^\gamma\right) = -\beta \sum_{|\gamma|=0}^{\infty}\left(p_\gamma e^{-\lambda\cdot\gamma} + \sum_{\gamma^{(1)}+\gamma^{(2)}=\gamma} p_{\gamma^{(1)}} p_{\gamma^{(2)}} e^{-\lambda\cdot\gamma^{(2)}}\right)$$

Ejemplo: variedad inestable 2-dimensional para la ecuación de Wright

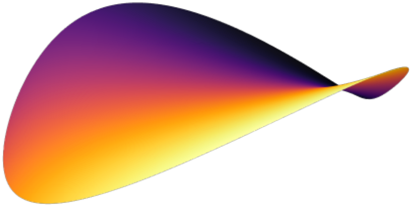
Usando las condiciones tangenciales

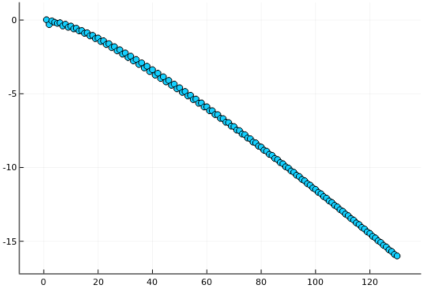
$$p_{00} = 0, \qquad p_{10} = p_{01} = \xi_0$$

donde de momento $\xi_0 \in \mathbb{R}$ es arbitrario podremos calcular

$$p_\gamma = -\frac{\beta}{(\lambda \cdot \gamma) + \beta e^{-(\lambda \cdot \gamma)}} \sum_{\substack{\gamma^{(1)} + \gamma^{(2)} = \gamma \\ 0 < |\gamma^{(i)}| < |\gamma|}} p_{\gamma^{(1)}} p_{\gamma^{(2)}} e^{-\lambda \cdot \gamma^{(2)}}$$

para $\gamma \in \mathbb{N}^2$





$$\alpha = 2.2 \;\; \textit{con} \;\; \xi_0 = 1.05$$

$$\lambda_- = 0.24151 - 1.71102i \text{ y } \lambda_+ = 0.24151 + 1.71102i$$

Variedades inestables

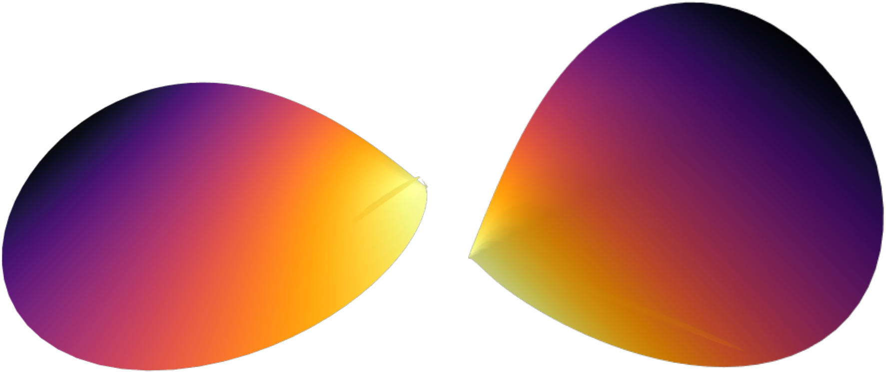
Hay un número finito de eigenvalores inestables y por lo tanto la condición de no resonancia se verifica en un número finito de casos.

Variedades estables lentas

Podríamos intentar obtener la variedad estable lenta generada por el par de eigenvalores estables más cercano al eje imaginario.

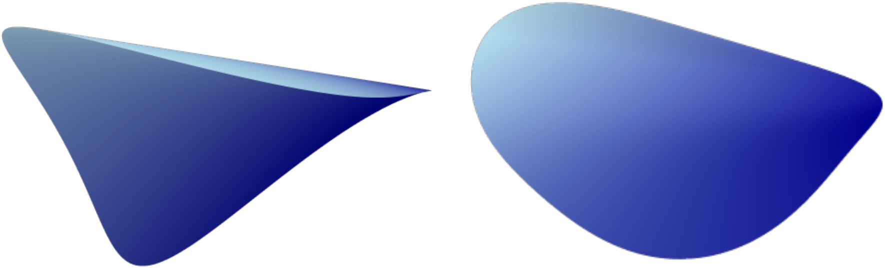
El problema es comprobar la condición de no resonancia sobre el conjunto de todos los eigenvalores estables (que es inifnito numerable.)

Ecuación de Wright



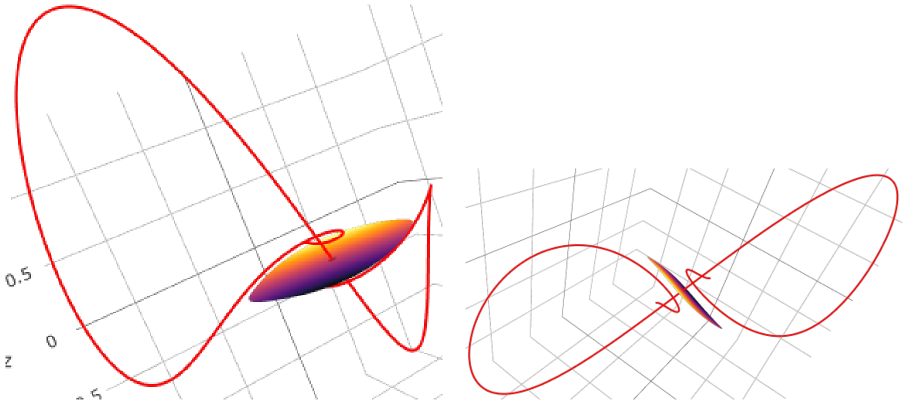
$\beta = 0.22$

Ecuación de Wright



$\beta = 0.5$

Ecuación cúbica de Ikeda



$$\beta = 1.29$$

- Groothedde, C. and Mireles James, J. D. (2017)
Parametrization Method for Unstable Manifolds of Delay Differential Equations
Journal of Computational Dynamics, vol. 1, pp. 21-70.

- Guo, S. and Wu, J. (2013) *Bifurcation Theory of Functional Differential Equations*
Applied Mathematical Sciences, Vol. 184, Springer, 1st ed., New York.

- Hale, J. K., and Verduyn Lunel, S. M., (1993)
Introduction to Functional Differential Equations
Applied Mathematics Sciences, Vol 99, Springer-Verlag, 1st ed., New York.

- Haro ,À., Canadell, M., Figueras, J., Luque A. and Mondelo J. (2016)
The Parametrization Method for Invariant Manifolds. From Rigorous Results to Effective Computations,
Applied Mathematical Sciences, Vol. 195, Springer, 1st ed.

The End