

Arturo Mapeos simplécticos en el plano

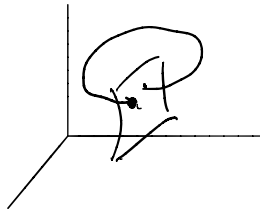
Existencia de círculos invariantes y Método de la obstrucción

Mapeos en el plano que conservan área
 y que son de tipo twist.

Sección de Poincaré

Espacio fase dim 4 \exists Energía

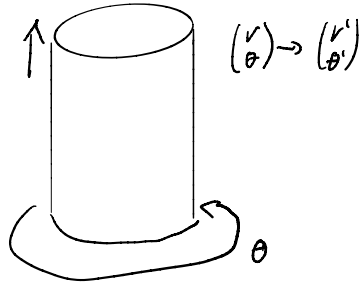
Espacio isoenergético dim 3



Coordenadas:

$\theta = \text{angular} \in \mathcal{S}^1$

$r = \text{velocidad} \in \mathbb{R}$



$$F = \begin{cases} r' = h_1(r, \theta) \\ \theta' = h_2(r, \theta) \end{cases} \quad \text{conserva área}$$

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} & \frac{\partial h_1}{\partial r} \\ \frac{\partial h_2}{\partial \theta} & \frac{\partial h_2}{\partial r} \end{pmatrix} \quad \det = 1$$

Twist

$(r, \theta) \mapsto (r', \theta')$ signo bien definido

$$\frac{\partial \theta'}{\partial r} > 0$$

Twist Energía - período

Si aumento energía, el período cambia (aumentar / disminuir)

Estabilidad dinámica a los sistemas mecánicos.

- No tenemos resonancias que se avorran.



$$(r, \theta) \xrightarrow{F} (r', \theta')$$

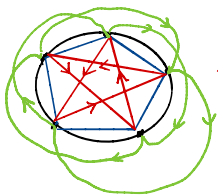
Extender la variable angular



$\theta \rightarrow \mathbb{R}$

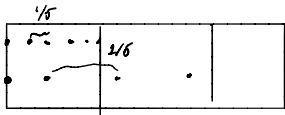


avanzamos 1 unidad



Número de rotación

Avance promedio angular por cada iteración



avance promedio

Orbita periódica.

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n}$$

$$(r, \theta) \rightarrow (y, x)$$

$$x \rightsquigarrow \theta$$

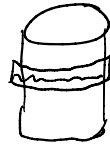
$$y \rightsquigarrow r$$

$$\begin{cases} y' = h_1(x, y) \\ x' = h_2(x, y) \end{cases}$$

simplectica

$$\begin{cases} y' = y + f(x) \\ x' = x + y' \end{cases}$$

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$



Mapo cotándur

$$y' = y + F(x)$$

$$x' = x + y'$$

Poincaré
Dirkhoff

Teorema Mapo Twist simplectico

Para todo num de rotación

$\rho = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \exists$ una pareja de órbitas periódicas con ese número de rotación.



$$\rho = 1/3$$

Estabilidad elíptica

u hiperbólica

Simplectico $DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ -\frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$

$$\lambda_1, \lambda_2$$

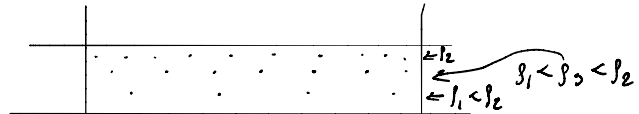
λ son reales

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1$$

$$\lambda > 1, \lambda < 1$$

Birkhoff

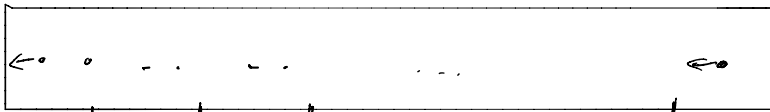
Las órbitas periódicas están bien ordenadas.



$\rho \in \mathbb{Q} \quad \rho = \frac{p}{q}$

← # de rectas que dan sobre el cilindro

→ # de puntos



1 2 3 p

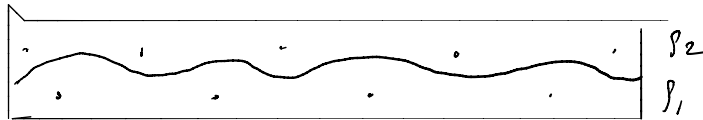
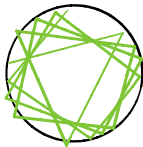
$$p = \frac{p}{q}$$

Orbita periódica

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_7 = x_0 + p \\ y_7 = y_0 \end{pmatrix}$$

$p \in \mathbb{Q}$

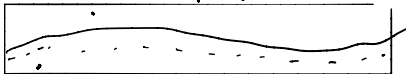
$p \notin \mathbb{Q}$



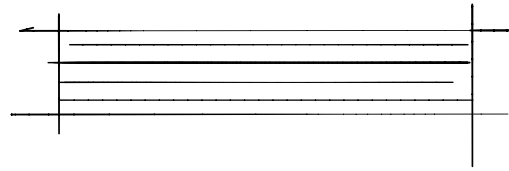
Curvas
invariante

$p_1, p_2 \in \mathbb{Q}$

Barreiras topológicas



Sin embargo



$$x' = x + y'$$

$$y' = y + \epsilon f(x)$$

$$\epsilon = 0$$

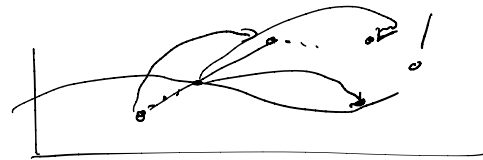
$$x' = x + 0'$$

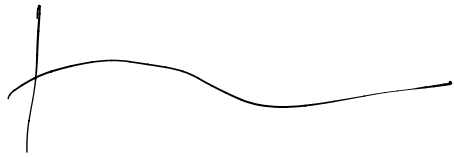
$$y' = y$$

ϵ creciendo



Birkhoff





Curva invariante
 \equiv gráfica de
 una función

$$X' = h_1(x, y)$$

$$y' = h_2(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial x'} > 0$$

Podemos definir $h(x, x')$

tal que $\frac{\partial h}{\partial x} = y, \frac{\partial h}{\partial x'} = y'$

$$x, y \longrightarrow x', y'$$

$$x, x' \longrightarrow y, y'$$

Aubry y Mather definen la
 órbita como la secuencia de los
 ángulos

$$x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$$

$$\begin{matrix} x_n & x_i, x_{i+1} & \begin{matrix} \nearrow y_i \\ \searrow y_{i+1} \end{matrix} \\ y_n & & \end{matrix}$$

Órbitas periódicas

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+q}$$

$$\forall n \quad x_n + p = x_{n+q} \quad p/q$$

Definen la acción de una órbita como

$$W_{nm}(x_{nm}) = \sum_{i=m}^{n-1} h(x_i, x_{i+1})$$

$$y' = y + \varepsilon P(x)$$

$$x' = x + y'$$

A medida que ε crece

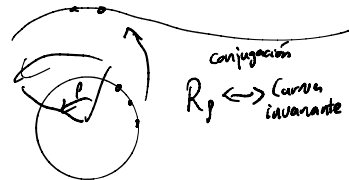
Teorema KAM

$$|\varepsilon| \ll 1$$

Trata de contruir esa conjugación.

Serie de Fourier es convergente

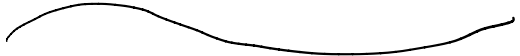
$$\|e\| \ll 1$$



ϵ^* dejan de \exists curvas invariantes
 \Rightarrow última curva invariante ϵ^*

$\sim 70'$ y $80'$

Kadanoff, Greene



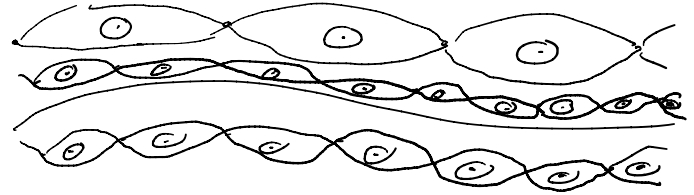
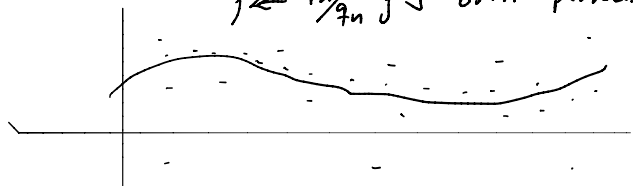
$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \rightarrow p \leftarrow \frac{p_n}{q_n}$$

$p = 0.3854 \dots$) $\dots \rightarrow$

Expansiones en fracciones continuas

$$\frac{p_n}{q_n} < p < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$\left\{ \leftarrow \frac{p_n}{q_n} \right\} \exists$ órbita periódica



$$p = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{razón} \\ \text{avea} \end{array} \quad \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \dots$$

Greene

$$y' = y + \epsilon \sin(x)$$

$$x' = x + y' \quad \epsilon \rightarrow c = 0.17 \dots$$

La última curva invariante desaparece.

$\frac{p_n}{q_n}$. calcula los valores propios

$$Re = \frac{2 - \lambda_1 - \lambda_2}{4}$$

$$\epsilon^* = 0.77165$$

$$\Rightarrow Re = 0.254 \dots$$

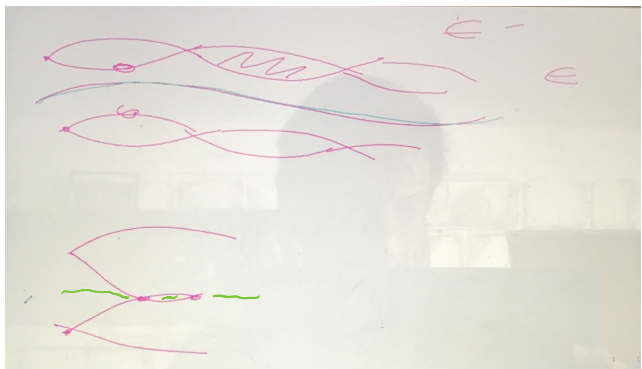
Greene

$$\beta \leq \frac{p_n}{q_n} \rightarrow Re$$

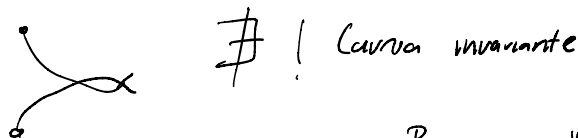
$$\begin{aligned} Re &\rightarrow \infty \\ \varepsilon^* &< \varepsilon \\ \varepsilon &< \varepsilon^* \\ Re &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$\Sigma^* \rightarrow Re \rightarrow cte.$$

es el valor para el cual la curva invariante desaparece.



$$\theta_n \frac{p_n}{q_n} \quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \theta_{n+1}$$



$$\frac{p_n}{q_n} < \beta < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \text{no puede haber curvas invariante.}$$

Tratar de encontrar el valor de ε tal que

$$\frac{p_n}{q_n} / \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \varepsilon_n$$

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$$

$$\varepsilon_{n+1}$$

se obtiene

$$\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1} > \varepsilon_{n+2} >$$

$$\uparrow \exists ! \frac{p_n}{q_n} < \beta < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$\lim \varepsilon_n = \varepsilon^*$$