Caso invariante

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega) \qquad \text{(inv } \mathbb{R}\text{)}$$

$$DF(K(\theta))P(\theta) = P(\theta+\omega)\begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

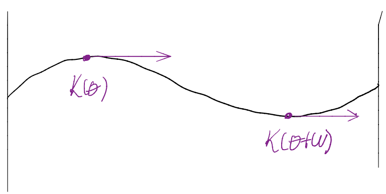
Caso aproximadamente invariante

$$F(K_0(\theta)) - K_0(\theta+\omega) = e_0(\theta) \qquad \text{(inv)}$$

$$DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$$

Derivada c.r.a. θ de (inv)

$$DF(K_0(\theta))L(\theta) = L(\theta+\omega) + De_0(\theta)$$



Si K es invariante

$$L(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta) = 0$$

Si K_0 es aprox inv

$$L(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta) = \text{pequeño.}$$

Detalles Libro de A. Haro, M. Canadell, J-Ll. Figueras, A. Luque, J.M. Mondelo (2016)

Artículo R. de la Llave, A. Gonzalez, À. Jorba, J. Villanueva (2005)

Tutorial de teoría KAM, R. de la Llave (2001)

$$\Omega_{K_0}(\theta) = L(\theta)^T J(K_0(\theta)) L(\theta)$$

$$\mathcal{L}_\omega \Omega_{K_0}(\theta) = L(\theta+\omega)^T (\Delta J(\theta)) L(\theta+\omega) + L(\theta+\omega)^T J(F(K(\theta))) De_0(\theta) + De_0(\theta)^T J(F(K(\theta))) DF(K(\theta)) L(\theta)$$

Donde

$$\Delta J(\theta) = J(F(K_0(\theta))) - J(K_0(\theta+\omega)) = \int_0^1 DJ(K_0(\theta+\omega) + t\, e_0(\theta))\, e_0(\theta)\, dt$$

$$\Omega_{K_0}(\theta) = O(\|e_0\|)$$

Introducimos

$$e_{sym}(\theta) = P(\theta)^T J(K_0(\theta)) P(\theta) - J_0$$

y podemos calcular

$$e_{sym}(\theta) = \begin{pmatrix} \Omega_{K_0}(\theta) & O_n \\ O_n & G(\theta)^T \Omega_{K_0}(\theta) G(\theta)^{-1} \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{O}(\|e_0\|)$$

Esto implica que $P(\theta)$ es invertible si $e_0(\theta)$ es suf. pequeño.

$$P(\theta)^{-1} = -(I - J_0 e_{sym}(\theta)) J_0 P(\theta)^T J(K_0(\theta))$$

Para la solución aproximada.

$$P(\theta+\omega)^{-1} DF(K_0(\theta)) P(\theta) = \begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\|e_0\|)$$

$$e_{red}(\theta) = -J_0 P(\theta+\omega)^T J(K_0(\theta+\omega)) DF(K_0(\theta)) P(\theta) - \begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

Hacer todas las cuentas, nos queda una matriz por bloques.

$$e_{red}^{1,1}(\theta) = N(\theta+\omega)^T J(K(\theta+\omega)) De_0(\theta)$$

$$e_{red}^{1,2}(\theta) = O_n$$

$$e_{red}^{2,1}(\theta) = -\Omega_K(\theta+\omega) - L(\theta+\omega)^T J(K(\theta+\omega)) De_0(\theta)$$

$$e_{red}^{2,2}(\theta) = L(\theta+\omega)^T \Delta J(\theta) DF(K(\theta)) N(\theta)$$
$$+ De_0(\theta) J(F(K(\theta))) DF(K(\theta)) N(\theta)$$

Introducimos el cambio de coordenadas

$$\Delta(\theta) = P(\theta)\xi(\theta)$$

$$DF(K_0(\theta)) P(\theta) \xi(\theta) - P(\theta+\omega)\xi(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$$

Multiplicamos por $-J_0 P(\theta+\omega)^T J(K(\theta+\omega)) \tilde{\wp} P^{-1}(\theta+\omega)$
y obtenemos

$$\begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \xi(\theta) + e_{red}(\theta)\xi(\theta) - (I_n - J_0 e_{sym}(\theta+\omega))\xi(\theta+\omega)$$
$$= J_0 P(\theta+\omega)^T J(K(\theta+\omega)) e_0(\theta)$$

si ξ resuelve la ecuación

$$e_{red}(\theta)\xi(\theta) = O(\|e_0\|^2)$$

$$e_{sym}(\theta)\xi(\theta+\omega) = O(\|e_0\|^2)$$

$$e_1(\theta) = e_0(\theta) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) + O(\|e_0\|^2)$$

$$e_1(\theta) = \eta(\theta) + \begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\xi(\theta) - \xi(\theta+\omega) + O(\|e_0\|^2)$$

A final sólo debemos resolver

$$\xi(\theta) = \begin{bmatrix} \xi^L(\theta) \\ \xi^N(\theta) \end{bmatrix},$$

$$\eta(\theta) = J_0 P(\theta+\omega)^T J(K(\theta+\omega)) e_0(\theta) = \begin{pmatrix} \eta^L(\theta) \\ \eta^N(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi^L(\theta) \\ \xi^N(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi^L(\theta+\omega) \\ \xi^N(\theta+\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^L(\theta) \\ \eta^N(\theta) - \langle \eta^N \rangle \end{pmatrix}$$

Tenemos 2 componentes.

Normal (N)

$$\xi^N(\theta) - \xi^N(\theta+\omega) = \eta^N(\theta) - \langle \eta^N \rangle \checkmark$$

$$\langle \xi^N \rangle = C_N$$

Tangente (L)

$$\xi^L(\theta) - \xi^L(\theta+\omega) = \eta^L(\theta) - T(\theta)\xi^N(\theta)$$

Escoger C_N para que

$$\langle \eta^L - T\xi^N \rangle = 0$$

Esto es posible siempre que

$$\det \langle T \rangle \neq 0$$

Condición de No-degeneración.

Si puedo hacer esto

$$\xi(\theta) = \begin{pmatrix} \xi^N(\theta) \\ \xi^L(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Delta(\theta) = P(\theta)\,\xi(\theta)$$

$$K_1(\theta) = K_0(\theta) + P(\theta)\begin{pmatrix} \xi^N(\theta) \\ \xi^L(\theta) \end{pmatrix}$$

$$F(K_1(\theta)) - K_1(\theta+\omega) = e_1(\theta)$$

$$\|e_1\|_{\rho-\delta} = O(\|e_0\|_\rho^2)$$

Perdemos regularidad pero tenemos un error que es cuadráticamente mejor.

¿Esto converge?

$$O(\|e_0\|_\rho),\ O(\|e_0\|^2_{\rho-\delta_1}),\ O(\|e_0\|^4_{\rho-\delta_1-\delta_2})$$

$$\ldots\quad O\left(\|e_0\|^{2^n}_{\rho-\sum_{j=1}^{n}\delta_j}\right)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\delta_j \longrightarrow \delta_\infty < \rho/2$$

$$\|e_0\|^{2^n}_{\rho-\sum\delta} \quad \text{mejor} \quad \|e_0\|^{2^n}_{\rho/2} \xrightarrow{n} 0$$

A final acabamos con

$e_n \longrightarrow e_\infty$ ¡Todavía regular!

Δ_{e_n} $\quad$ Δ_{ρ_∞}

$$K_n \longrightarrow K_\infty$$

$$F(K_\infty(\theta)) = K_\infty(\theta+\omega)$$

¿Es un toro invariante Lagrangiano?

La conclusión del teorema KAM.