Método de Newton y marco adaptado

Queremos resolver

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega) \qquad (inv)$$

$$K : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$$

La resolvemos con un método iterativo.

Empezamos con una semilla (solución aproximada)

$$K_0 : \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R} \quad \text{tal que}$$

$$F \circ K_0(\theta) - K_0(\theta+\omega) = e_0(\theta)$$

donde $e_0(\theta)$ es pequeño.

Buscamos una corrección $\Delta(\theta)$

$$K_1(\theta) = K_0(\theta) + \Delta(\theta)$$

Queremos que

$$F \circ K_1(\theta) - K_1(\theta+\omega) = e_1(\theta)$$

con $\|e_1\| \ll \|e_0\|$

$$e_1(\theta) = F \circ K_1(\theta) - K_1(\theta+\omega)$$
$$= F(K_0(\theta) + \Delta(\theta)) - K_0(\theta+\omega) - \Delta(\theta+\omega)$$
$$= F(K_0(\theta)) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) + O(\|\Delta\|^2)$$
$$- K_0(\theta+\omega) - \Delta(\theta+\omega)$$
$$= e_0(\theta) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) + O(\|\Delta\|^2)$$

La idea es que intentamos resolver

$$e_0(\theta) + DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = 0$$

si pudieramos, tendriamos

$$\|e_1(\theta)\| = O(\|\Delta\|^2) = O(\|e_0\|^2)$$

$$\|e_1(\theta)\| = O(\|e_0\|^2)$$

Para lograrlo debemos resolver

$$DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$$

El caso del mapeo estándar

$K_0 : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}\times\mathbb{R}$

$$K_0(\theta) = \begin{pmatrix} K^x(\theta) \\ K^y(\theta) \end{pmatrix}, \quad \Delta(\theta) = \begin{pmatrix} \Delta^x(\theta) \\ \Delta^y(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+\varepsilon V''(K^x(\theta)) & 1 \\ \varepsilon V''(K^x(\theta)) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^x(\theta) \\ \Delta^y(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta^x(\theta+\omega) \\ \Delta^y(\theta+\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_0^x(\theta) \\ e_0^y(\theta) \end{pmatrix}$$

Ecs cohomológicas de coefficientes no constantes.

En el caso integrable,

$$DF_{\varepsilon=0}(K_0(\theta)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^x(\theta) \\ \Delta^y(\theta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta^x(\theta+\omega) \\ \Delta^y(\theta+\omega) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e_0^x(\theta) \\ e_0^y(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\Delta^x(\theta) + \Delta^y(\theta) - \Delta^x(\theta+\omega) = -e_0^x(\theta) \quad (1)$$

$$\Delta^y(\theta) - \Delta^y(\theta+\omega) = -e_0^y(\theta) \quad (2)$$

Puedo resolver (2) (si $e_0^y(\theta)$ tiene promedio cero)

$$\Delta^x(\theta) - \Delta^x(\theta+\omega) = -e_0^x(\theta) - \Delta^y(\theta)$$

·) Ajustar $\langle \Delta^y \rangle$ para que

$$\langle -e_0^x - \Delta^y \rangle = 0$$

En el caso integrable podemos resolver

$$DF(K_0(\theta))\Delta(\theta) - \Delta(\theta+\omega) = -e_0(\theta)$$

En el caso no-integrable, hay que trabajar un poco más...

Introducir un marco adaptado para que $DF(K_0(\theta))$ "se vea" como el caso integrable.

Esto va a funcionar para un mapeo exacto simpléctico en dim arbitraria.

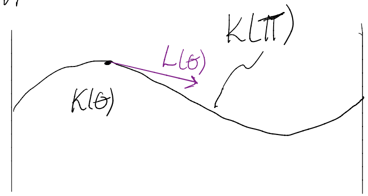
Consideramos un toro Lagrangiano parametrizado por $K: \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

El marco adaptado esta dado por un vector tangente a $\mathcal{K} = K(\mathbb{T}^n)$

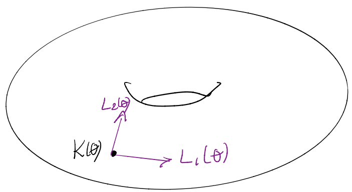
Introducimos un mapeo $L: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n\times n}$ dado por $L(\theta) = DK(\theta)$

$\llcorner$ da derivada con respecto a θ.

1-dim



2-dim



$$L_1(\theta) = \partial_{\theta_1} K(\theta)$$
$$L_2(\theta) = \partial_{\theta_2} K(\theta)$$

2n-dim

$L(\theta) = DK(\theta)$ matriz de $2n \times n$

Como vimos antes, L describe un marco Lagrangiano $DK_0(\theta)^T J(K_0(\theta)) DK_0(\theta) = 0_n$

esto quiere decir que

$$L(\theta)\, J(K_0(\theta))\, L(\theta) = 0_n$$

Recordar que $J = J(K_0(\theta))$

$$J^2 = -I_{2n} \quad , \quad J^T = -J$$

Ahora queremos construir un subespacio complementario dado por

$$N : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}^{2n \times n}$$

y tal que la matriz creada por la yuxtaposición

$$P(\theta) = (L(\theta) \vdots N(\theta))$$

satisfaga que

$$P(\theta)^T J(K(\theta)) P(\theta) = J_0 = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$$

Entonces diremos que el marco $P(\theta)$ es simpléctico.

Para construir N, tomamos

$$N(\theta) = J(K(\theta)) L(\theta)\, G(\theta)^{-1}$$
$$G(\theta) = L(\theta)^T L(\theta)$$

Veamos que $P(\theta)$ es simpléctica.

$$P^T(\theta)\, J(K_0(\theta))\, P(\theta)$$

$$= \begin{pmatrix} L(\theta)^T \\ N(\theta)^T \end{pmatrix} J(K_0(\theta)) \left(L(\theta) \mid N(\theta) \right)$$

$$= \begin{pmatrix} L(\theta)^T J(K_0(\theta)) L(\theta) & L(\theta)^T J(K_0(\theta)) N(\theta) \\ N(\theta)^T J(K(\theta)) L(\theta) & N(\theta)^T J(K_0(\theta)) N(\theta) \end{pmatrix}$$

$L(\theta)^T J(K_0(\theta)) L(\theta) = O_n$ Lagrangiano.

$$N(\theta)^T J(K_0(\theta)) N(\theta)$$

$$= G(\theta)^{-T} L(\theta)^T J^T \overset{\to Id}{\cancel{(K_0(\theta)) J(K_0(\theta))}} J(K_0(\theta)) L(\theta)\, G(\theta)^{-1}$$

$$= G(\theta)^{-T} L(\theta)^T J(K_0(\theta)) L(\theta)\, G(\theta)^{-1} = O_n$$

$$N(\theta)^T J L(\theta) = G(\theta)^{-T} L(\theta)^T J^T J L(\theta)$$

$$= I_n$$

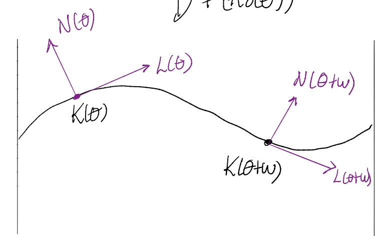
$$L(\theta)^T J N(\theta) = -I_n$$

$$P^T(\theta)\, J(K_0(\theta))\, P(\theta) = J_0$$

Podemos escribir la inversa de $P(\theta)$

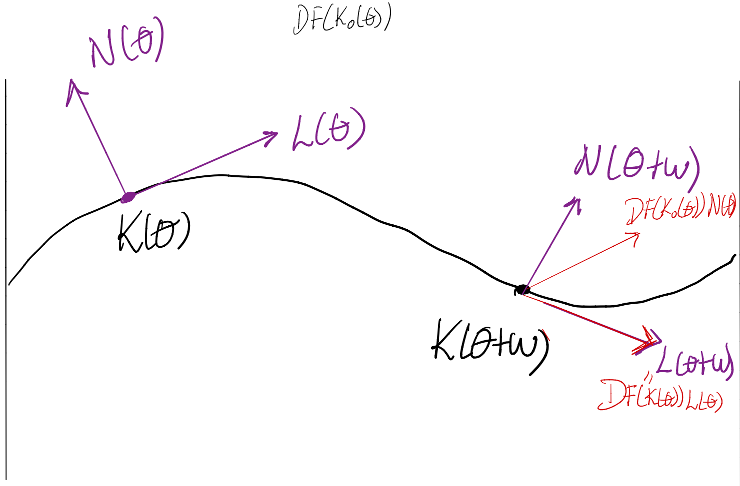
$$P^{-1}(\theta) = -J_0 P(\theta)^T J(K(\theta))$$

Para 1-dim podemos visualizar la accion de $DF(K_0(\theta))$ sobre el marco. $DF(K_0(\theta))$



Queremos escribir $DF(K_0(\theta))P(\theta)$ con el marco en $\theta + w$

$$P(\theta+w) \begin{pmatrix} A(\theta) & T(\theta) \\ C(\theta) & B(\theta) \end{pmatrix}$$



$$DF(K(\theta))P(\theta) = P(\theta+\omega)\begin{pmatrix} I_n & T(\theta) \\ O_n & I_n \end{pmatrix}$$

Por la ecuación de invarianza

D_θ

$$F(K(\theta)) = K(\theta+\omega)$$

$$\hookrightarrow DF(K(\theta))L(\theta) = L(\theta+\omega) + O_n N(\theta+\omega)$$

$$P(\theta) = (L(\theta) \mid N(\theta))$$

$$A(\theta) = I_n \quad , \quad C(\theta) = O_n$$

$$DF(K(\theta))N(\theta) = L(\theta+\omega)T(\theta) + N(\theta+\omega)B(\theta)$$

Multiplicamos por $L(\theta+\omega)^T J^T$

$$L(\theta+\omega)^T J^T DF(K(\theta))\, J L(\theta)\, G(\theta)^{-1}$$

del Hecho de que $F^*\Omega = \Omega$

$$J^T_{K(\theta)} DF(K(\theta))\, J(K(\theta)) = DF(K(\theta))^{-T}$$

$$L(\theta+\omega)^T DF(K(\theta))^{-T} L(\theta)\, G(\theta)^{-1}$$

$$(DF(K(\theta))^{-1} L(\theta+\omega))^T = L(\theta)^T$$

$$L(\theta)^T L(\theta)\, G(\theta)^{-1} = Id$$

Lado derecho

$$L(\theta+\omega)^T J^T J L(\theta+\omega)\, G(\theta+\omega)^{-1} B(\theta)$$

$$= I_n B(\theta) = B(\theta)$$

$$B(\theta) = Id.$$

Ahora multiplicamos por

$$(G(\theta+\omega))^{-1} L(\theta+\omega)^T$$

Lado derecho $= T(\theta)$

$$(G(\theta+\omega))^{-1} L(\theta+\omega)^T DF(K_0(\theta))N(\theta) = T(\theta)$$

Se llama T por torsión.