Números irracionales Diofánticos

$\omega \in \mathbb{R}^n$

buscamos cotas superiores de

$$[\mathrm{dist}(\omega\cdot k, \mathbb{N})]^{-1}$$

$$k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

$$|k|_1 = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|$$

En 1 dim

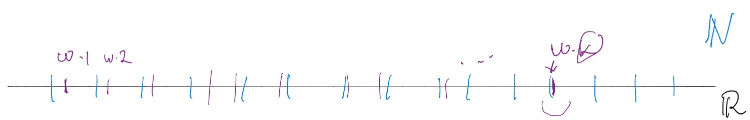
$$\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \quad \sim \quad (\omega_1, \omega_2) \quad \omega_1 k_1 + \omega_2 k_2 \mathbb{Z}$$

$$\omega_1/\omega_2$$

tal que

$$|\omega\cdot k - n| \geq \nu/|k|^{\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}/\{0\}, \; n \in \mathbb{N}$$

$$\nu > 0, \quad \tau \geq 1$$



Ejemplo

Vemos que $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ es bien difícil de aproximar.

ω satisface

$$P(\omega) = \omega^2 - \omega - 1 = 0$$

Sean $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$

$$P\left(\tfrac{m}{n}\right) \neq 0$$

$$n^2 P\left(\tfrac{m}{n}\right) = m^2 - nm - n^2 \in \mathbb{Z}$$

$$\left|n^2 P\left(\tfrac{m}{n}\right)\right| \geq 1 \quad \Updownarrow$$

$$\left|n^2 P\left(\tfrac{m}{n}\right) - n^2 P(\omega)\right| \geq 1$$

$$\Rightarrow \left|P\left(\tfrac{m}{n}\right) - P(\omega)\right| \geq n^{-2}$$

$$n^{-2} \leq \left|P\left(\tfrac{m}{n}\right) - P(\omega)\right| \leq \overbrace{|P'(\xi)|}^{=\nu^{-1}} \left|\omega - \tfrac{m}{n}\right|$$

$$\left|\omega - \tfrac{m}{n}\right| \geq \nu/n^2 \Rightarrow |\omega\cdot n - m| \geq \nu/|n|$$

La razón aurea es Diofantica con

$$\nu = \frac{1}{|P'(\xi)|}, \quad \tau = 1$$

Resultado clásico de Liouville

Teorema

Sea $\omega \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tal que $P(\omega)=0$

P polinomio de grado ℓ con coefs enteros y tal que

$P'(\omega)=0, \dots, P^{j)}(\omega)=0, P^{j+1)}(\omega)\neq 0$

Entonces tenemos que para alguna $C>0$

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| \geq C / n^{\ell/j+1} \quad \forall m,n \in \mathbb{Z}$$

Prueba

$P(\omega)=0, \quad P\left(\frac{m}{n}\right)\neq 0$

$n^{\ell} P\left(\frac{m}{n}\right) \in \mathbb{Z} \qquad \left|n^{\ell} P\left(\frac{m}{n}\right)\right| \geq 1$

$\left|P(\omega) - P\left(\frac{m}{n}\right)\right| \geq n^{-\ell}$

$$n^{-\ell} \leq \left|P(\omega) - P\left(\frac{m}{n}\right)\right| \leq \left|P^{j+1)}(\xi)\right| \left|\omega - \frac{m}{n}\right|^{j+1}$$

//

Charles Roth

ω es irracional algebráico entonces

$$\left|\omega - \frac{m}{n}\right| \geq C_{\varepsilon} n^{-2-\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Def

Un número ω se llama Diofántico de tipo (ν, τ) para $\nu>0$ y $\tau \geq 1$ si

$$|\omega - p/q| > \nu |q|^{-1-\tau} \quad (\mathcal{D})$$

para todo $p/q \in \mathbb{Q}$

Notación $\mathcal{D}_{(\nu,\tau)}$

Un número que no es Diofantico se llama número de Liouville.

En dimensiones mayores hay 2 condiciones

$$|\omega\cdot k - \ell|^{-1} \leq C|k|^{\tau}, \quad \forall (k,\ell) \in (\mathbb{Z}^n - \{0\}, \mathbb{Z})$$

$$|\omega\cdot k|^{-1} \leq C|k|^{\tau}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n - \{0\}$$

Ejemplo (Constante de Liouville).

$$\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} 10^{-j!} = 0.11000100\ldots 010\ldots 010\ldots$$

Es posible probar que

$$q_n = 10^{n!} \qquad p_n = q_n \sum_{j=1}^{n} 10^{-j!}$$

Son buenos aproximantes

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{\,n}}$$

este es fácil de aproximar.

Ecuaciones cohomológicas de coeficientes constantes.

$$\varphi(\theta) - \varphi(\theta+\omega) = \eta(\theta) \quad \ldots \quad (Coh)$$

donde $\eta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $\int \eta(\theta)\,d\theta = 0$

función periódica con promedio cero.

Solución formal en espacio de Fourier.

Si $\eta(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\cdot\theta}$, $\eta_0 = 0$

$$\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\cdot\theta}$$

incognitas.

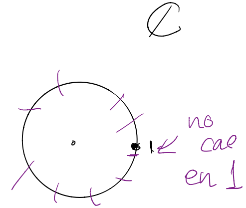
En modos de Fourier

k) $$\hat{\varphi}_k - \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\omega} = \hat{\eta}_k$$

$$\hat{\varphi}_k (1 - e^{2\pi i k\omega}) = \hat{\eta}_k$$

Si $k=0$ $\hat{\varphi}_0(0) = 0$ $\hat{\varphi}_0 = C$ grado de libertad (Promedio libre)

Si $\omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ entonces



$k\neq 0)$ $\quad \hat{\varphi}_k = \dfrac{\hat{\eta}_k}{1-e^{2\pi i k\omega}}$

Formalmente podemos escribir

$$\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{\eta}_k}{1-e^{2\pi i k\omega}}\, e^{2\pi i k\theta}$$

¿Cómo saber si la expresión de φ converge en algún espacio de funciones?

¿Cómo decrece el denominador?

Tomamos $|k\cdot\omega - n| \geq \nu |k|^{-\tau}$ un irracional difícil de aproximar.

$$\frac{1}{1-e^{2\pi i k\omega}\cdot 1} = \frac{1}{1-e^{2\pi i(k\omega-n)}}$$

Sabemos que $e^{-2\pi i n} = 1$

$$1-e^{2\pi i(k\omega-n)} = -2\pi i(k\omega-n) + \frac{(2\pi i(k\omega-n))^2}{2} + O(|k\omega-n|^3)$$

$$\left|\frac{1}{1-e^{2\pi i(k\omega-n)}}\right| \sim \left|\frac{1}{2\pi i(k\omega-n)}\right|$$

$\leq C\nu^{-1}|k|^{\tau}$ Esto crece como una potencia.

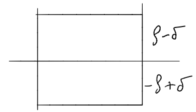
Pero $\hat{\eta}_k \in \mathcal{A}_\rho \Rightarrow |\hat{\eta}_k| \leq e^{-2\pi|k|\rho}\|\eta\|_{\mathcal{A}_\rho}$

Veremos que con estas estimaciones $\varphi \in \mathcal{A}_{\rho-\delta}$

$$\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{\eta}_k}{1 - e^{2\pi i k \omega}} e^{2\pi i k \theta}$$

1) Principio del máximo

$$\| e^{2\pi i k \theta} \|_{A_{\rho-\delta}} \leq e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$



2)

$$\|\varphi\|_{A_{\rho-\delta}} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{|\hat{\eta}_k|}{|2\pi i(k\omega-n)|} e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}-\{0\}} \frac{1}{2\pi} \nu^{-1} |k|^{\tau} e^{-2\pi|k|\rho} \|\eta\|_{\rho} e^{2\pi(\rho-\delta)|k|}$$

$$\leq \frac{\nu^{-1}}{2\pi} \sum_{k} |k|^{\tau} e^{-2\pi|k|\delta} \|\eta\|_{A_\rho}$$

$$\leq \frac{\nu^{-1}}{2\pi} \|\eta\|_{A_\rho} \sum_{k} |k|^{\tau} e^{-2\pi|k|\delta}$$

Resulta que podemos comparar la serie con esta integral

$$\int_0^\infty x^{\tau} e^{-2\pi\delta x} dx = \frac{1}{(2\pi\delta)^{\tau+1}} \tau!$$

$$\|\varphi\|_{\rho-\delta} \leq C \nu^{-1} \delta^{-\tau} \|\eta\|_{\rho}$$

$$\varphi(\theta) - \varphi(\theta+\omega) = \eta(\theta)$$