Barry Simon

Joaquim Puig, Notas de funciones cuasi-periódicas.

Katok - Hasselblatt. Sistemas Dinámicos.

En el caso en que la trayectoria es densa tenemos que la cerradura de la trayectoria es $F(\mathbb{T}^n)$.

Por esta razón necesitamos condiciones sobre la regularidad de F para tener funciones cuasi-periódicas

Nota

El levantamiento no está definido de manera única.

Sea $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ y $\omega \in \mathbb{R}^n$ entonces para cada $\phi \in \mathbb{T}^n$ (fase inicial) consideramos

$$f_\phi(t) = F(\omega t + \phi)$$
$$= F(\omega_1 t + \phi_1, \dots, \omega_n t + \phi_n)$$

- Todas las $f_\phi(t)$ tienen el mismo vector frecuencia.

El conjunto de funciones cuasi-periódicas que se pueden definir de esta manera son homeomorfas a $\mathbb{T}^n$ ($\mathbb{T}^n$ es compacto).

Def

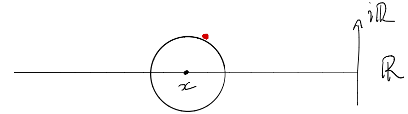
Definimos la <u>función casco</u> de una función cuasi-periódica de esta forma.

Notamos que para dos fases iniciales $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{T}^n$ el segmento $l \subseteq \mathbb{T}^n$ que une a ϕ_1 con ϕ_2 describe una familia de funciones cuasi-periódicas con el mismo levantamiento

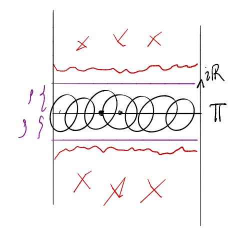
Regularidad

La noción de regularidad de una función cuasi-periódica f está relacionada con la regularidad del levantamiento F.

Def Diremos que una función $F : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^n$ es el espacio cubriente de $\mathbb{T}^n$) es real-analítica en cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n$ si existe una vecindad $U_x \subset \mathbb{C}^n$ tal que F se puede extender a una función analítica en esta vecindad U_x.



Esta noción se extiendo para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y como la función F es periódica en cada componente, las vecindades se extienden de manera uniforme ($\mathbb{T}^n$ es compacto).



Es decir, existe una $\rho > 0$ tal que F es analítica en el conjunto complejo definido por la condicion $|\text{Im } x| < \rho$

A la construcción anterior se le denota por <u>banda de analiticidad</u> de la serie de Fourier.

De la misma forma, usamos el levantamiento $F: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$

la serie de F es

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n, \quad k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$$

$$F(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{F}_k e^{2\pi i k \cdot \theta}$$

producto punto

los coeficientes de Fourier,

$$\hat{F}_k = \int_{\mathbb{T}^n} F(\theta) e^{-2\pi i k \cdot \theta} d\theta$$

Queremos definir los coeficientes de Fourier de $f(t)$ cuasi-periódica.

- $f(t) = F(\omega_1 t, \omega_2 t, \dots, \omega_n t)$

Siempre que F se suficientemente suave, escribimos

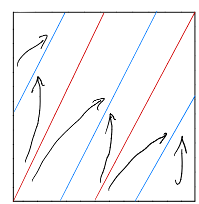
$$f(t) = F(\omega t + \phi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{F}_k e^{2\pi i k \cdot (\omega t + \phi)}$$

$$(\theta = \omega t + \phi)$$

<u>Nota</u>

Cuando hablamos de funciones cuasi-periódicas que son soluciones de ecuaciones diferenciales sabemos que la existencia de una solución c-p implica la existencia de un toro invariante.

→ el converso no es necesariamente cierto.



Espacios de funciones analíticas

$$\mathcal{A}_\rho = \Big\{ \eta \;\Big|\; \eta \text{ es analítica para } \overbrace{|\mathrm{Im}\,\theta| < \rho}^{\text{banda de analiticidad}},\ \text{y continua para } |\mathrm{Im}\,\theta| \le \rho,\quad \|\eta\|_\rho = \sup_{|\mathrm{Im}\,\theta|\le\rho} |\eta(\theta)| \Big\}$$

El decaimiento de los coeficientes de Fourier está dado por la integral de Cauchy.

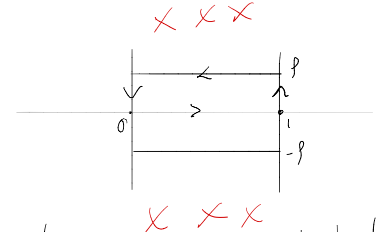
$$\eta \in \mathcal{A}_\rho \qquad |\hat{\eta}_k| \le e^{-2\pi\rho|k|}\, \|\eta\|_{\mathcal{A}_\rho}$$

Demo en 1 dimensión

$$\mathbb{T}^1_\rho = \mathbb{T}^1 + i(-\rho,\rho) \quad \text{banda.}$$

$$\hat{\eta}_k = \int_0^1 \eta(\theta)\, e^{-2\pi i k\theta}\, d\theta$$

Para $k<0$ tomamos trayectoria γ



$$\left| \int_0^1 \eta(\theta)\, e^{-2\pi i k\theta}\, d\theta \right| = \left| \int_0^1 \eta(-t+i\rho)\, e^{-2\pi i k(-t+i\rho)}\, dt \right|$$

$$\le \int_0^1 \underbrace{|\eta(-t+i\rho)}_{\|\eta\|_\rho}\, e^{-2\pi i k(i\rho)}\, e^{-2\pi i k(-t)}|\, dt$$

$$\le \|\eta\|_\rho\, e^{+2\pi k\rho}$$

$$= e^{-2\pi|k|\rho}\, \|\eta\|_\rho$$

$$|\hat{\eta}_k| \le e^{-2\pi|k|\rho}\, \|\eta\|_{\mathcal{A}_\rho}$$

$k \in \mathbb{Z}$