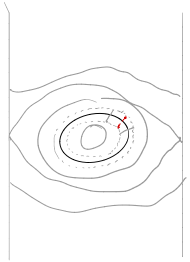


Movimiento Cuasi-periódico

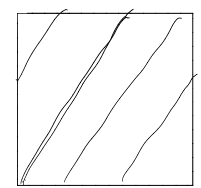
Consideramos un Hamiltoniano integrable.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j + (2\pi\omega_j)^2 (q_j)^2 \qquad \Big| \qquad \begin{aligned} \dot{q}_j &= p_j \\ \dot{p}_j &= -(2\pi\omega_j)^2 q_j \end{aligned}$$

El flujo es

$$\varphi_j^t (q,p) = \Big(q_j \cos(2\pi\omega_j t) + \frac{p_j}{2\pi\omega_j} \sin(2\pi\omega_j t),$$

$$p_j \cos(2\pi\omega_j t) - q_j\,\omega_j \sin(2\pi\omega_j t)\Big)$$



ω_1, ω_2

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \begin{cases} \mathbb{Q} \\ \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

Transformaciones del toro

$$T_\gamma(x_1, \dots, x_n) = (x_1+\gamma_1, \dots, x_n+\gamma_n) \pmod 1$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

Prop

La transformación T_γ es minimal (la órbita de cualquier punto es densa) si y sólo si $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ y 1 son racionalmente independientes.

Si $\sum_{i=1}^{n} k_i \gamma_i$ no es un entero para cualquier colección de enteros $k_1, \dots, k_n$ que no sean todos cero.

Transitividad topológica.

Def

$f : X \to X$ continua

X espacio métrico, separable y localmente compacto.

Decimo que f es topológicamente transitiva si $\forall\, \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ abiertos existe un entero $N = N(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ tal que $f^N(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \phi$.

Prop.

$f : X \to X$ continua

X loc. compacto y separable.

f es top. trans. si y sólo si $\nexists$ dos conjuntos f-invariantes no vacios, disjunto.

Prueba

$\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset X$ abiertos.

Invariantes y abiertos. $\Big\}$ $\tilde{\mathcal{U}} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\mathcal{U})$, $\tilde{\mathcal{V}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(\mathcal{V})$

no pueden ser disjuntos.

Si lo fueran. entonces tendríamos m y $n \in \mathbb{Z}$ tales que

$$f^n(\mathcal{U}) \cap f^m(\mathcal{V}) \neq \phi$$

pero esto implicaría que

$f^{n-m}(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V}$ sería no vacío.

La otra implicación es análoga.

Prop

$f : X \to X$ top. transitiva

Entonces no existe ninguna funcion $\varphi : X \to \mathbb{R}$ que sea f invariante y distinta de constante.

Prueba

Sea $\varphi : X \to \mathbb{R}$ f-invariante.

$$\varphi(f(x)) = \varphi(x) \quad \forall x \in X$$

φ es no constante, existe t tal que

$$\mathcal{U} = \{x \in X \mid \varphi(x) > t\} \text{ y}$$

$$\mathcal{V} = \{x \in X \mid \varphi(x) < t\}$$

son abiertos y distintos del vacío.

También son disjuntos.

Como φ es f-invariante entonces $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son f-invariantes lo cual es una contradicción.

Prueba de que T_ρ es minimal.

Primero veamos que si $\sum k_i \rho_i = k$ y no todos los k_i's son cero entonces T_ρ no es top. transitiva.

Construimos una función $\varphi : \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \sin(2\pi \sum k_i x_i)$$

la cual es continua, $\mathbb{T}^n$ y no-constante.

φ es invariante bajo T_ρ

$$\begin{aligned}\varphi(T_\rho x) &= \sin(2\pi \sum k_i (x_i + \rho_i)) \\ &= \sin(2\pi \sum k_i x_i + 2\pi \sum k_i \rho_i) \\ &= \sin(2\pi \sum k_i x_i) = \varphi(x)\end{aligned}$$

T_ρ no es top. transitiva $\Rightarrow \sum k_i \rho_i$ es entero

Para probar el converso veamos que la independencia racional => transitividad ~~to~~ topológica.

Supongamos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son abiertos, disjuntos e invariantes. (no vacios)

Construimos una función de $\mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$, T_γ-invariante.

Sea χ la función característica de $\mathcal{U}$.

$$\chi(T_\gamma x) = \chi(x)$$

Su transformada de Fourier

$$\chi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n} \chi_{k_1,\dots,k_n} e^{2\pi i \sum k_i x_i}$$

Como es invariante.

$$\chi(T_\gamma x) = \sum_{(k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n} \chi_{k_1,\dots,k_n} e^{2\pi i \sum k_i (x_i + \gamma_i)}$$

$$= \sum \chi_{k_1,\dots,k_n} e^{2\pi i \sum k_i x_i} e^{2\pi i \sum k_i \gamma_i} = \chi(x)$$

Coeficiente a coeficiente

$$\chi_{k_1,\dots,k_n}\left(1 - e^{2\pi i \sum k_i \gamma_i}\right) = 0$$

entonces $\chi_{k_1,\dots,k_n} = 0$ para $k_1, \dots, k_n$ no todos cero.

ó $e^{2\pi i \sum k_i \gamma_i} = 1$

Como $\mathcal{U}$ es abierto no vacío

$$\chi \neq 0 \quad , \quad \chi_{k_1,\dots,k_n} \neq 0$$

Entonces $\sum k_i \gamma_i$ es un entero. //

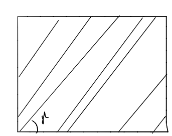
Flujo lineal en el toro y sistemas completamente integrables

2- toro

$$\frac{dx_1}{dt} = \omega_1 \quad , \quad \frac{dx_2}{dt} = \omega_2$$

El flujo

$$T_\omega^t(x_1, x_2) = (x_1 + \omega_1 t, x_2 + \omega_2 t) \pmod 1$$



$T_\omega^t(0,0)$ es una línea con pendiente $\gamma = \omega_1 / \omega_2$

El análogo en el caso $\mathbb{T}^n$ es

$$\frac{dx_i}{dt} = \omega_i \,, \quad i = 1, \dots, n$$

$$T_\omega^t (x_1, \dots, x_n) = (x_1 + t\omega_1, \dots, x_n + t\omega_n)$$

Notar que el flujo es minimal si las ω_i's son racionalmente independientes.

$$\sum_{i=1}^n k_i \omega_i \neq 0 \quad \text{para enteros no todos cero.}$$

<u>Prop</u>

El flujo $\{T_\omega^t\}$ es minimal si y sólo si los números $\omega_1, \dots, \omega_n$ son racionalmente independientes.

<u>Demostración</u>

Sabemos que $T_\omega^t = T_{t\omega}$

La minimalidad seguirá de mostrar que existe un t tal que

$\sum t k_i \omega_i$ no es nunca un entero.

Para cualquier colección de enteros $(k_1, \dots, k_n, k)$ hay un sólo t tal que $t \sum_{i=1}^n k_i \omega_i = k$, con k un entero

$$t = \frac{k}{\sum_{i=1}^n k_i \omega_i} \quad \left(\text{recordar que } \textstyle\sum_i k_i \omega_i \neq 0\right)$$

Quitamos todos los t's tales que esto sucede.

Debe existir un t tal que

$$t \sum_i k_i \omega_i \notin \mathbb{Z}$$

ya que $(k_1, \dots, k_n, k)$ son numerables y $t \in \mathbb{R}$ son no-numerables. //

El flujo de los n-osciladores armónicos

$$\varphi_j^t(q,p) = \left(q_j \cos(2\pi w_j t) + \frac{p_j}{2\pi w_j} \sin(2\pi w_j t),\right.$$
$$\left. p_j \cos(2\pi w_j t) - q_j w_j \sin(2\pi w_j t)\right)$$

El movimiento en cada oscilador es periódico de periodo $1/w_j$

el movimiento en $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{T}^n$ no es periódico amenos a menos que todas las frecuencias sean múltiplos enteros de una frecuencia fija.

Funciones cuasi-periódicas

Def Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es cuasi-periódica cuando existen constantes reales racionalmente independientes $w_1, \dots, w_k$ y una función $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ periódica de periodo 1 en cada variable. tal que $f(t) = F(w_1 t, \dots, w_k t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Notas

- Las frecuencias $w_1, \dots, w_k$ son las frecuencias básicas de la f.
- Llamamos a F el levantamiento de f.
- El vector $w = (w_1, \dots, w_k)$ se llama el vector frecuencia de la función cuasi-periódica.
- Notamos que al ser $F: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ 1-periódica en cada variable, entonces F es una función del toro $\mathbb{T}^n$ en $\mathbb{R}$ de la forma $F: \mathbb{T}^n \to \mathbb{R}$.
- Veamos que sin condiciones extras ni el vector frecuencia ni el levantamiento están determinados de manera única.

Sea (No ejemplo)

$$f(t) = \operatorname{sen}(2\pi t) + \operatorname{sen}(4\pi t)$$

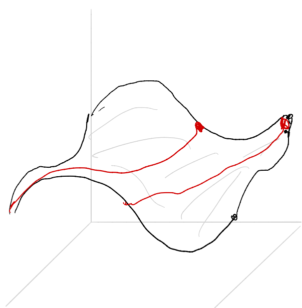
función periódica de periodo $1/2$

Podemos escribir $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$

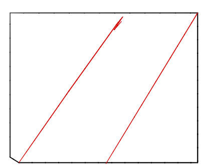
$$F(\theta_1, \theta_2) = \sin(2\pi\theta_1) + \operatorname{sen}(2\pi\theta_2)$$

y $f(t) = F(t, 2t)$

Las frecuencias son $\omega_1 = 1$
$\omega_2 = 2$



$f(t) = F(t, 2t)$



Esta no es una trayectoria densa sobre el toro.

Ejemplo

Sea

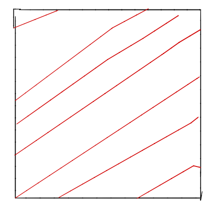
$$f_1(t) = \sin(2\pi t) + \sin(2\pi\sqrt{2}\, t)$$

y

$$F(\theta_1, \theta_2) = \sin(2\pi\theta_1) + \sin(2\pi\theta_2)$$

entonces

$$f_1(t) = F(t, \sqrt{2}\, t)$$



Sabemos que la trayectoria es densa sobre la superficie de $\mathbb{T}^2$

Si consideramos que la definición debe respetar el concepto de continuidad.

Dicho de otra forma, requerimos que la cerradura de la trayectoria de f sea $F(\mathbb{T}^2)$.