Ejemplo 1

Si $H = H(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}^2(D_2)$

$D_2 \subset \mathbb{R}^n$

independiente de x_j

$F_j = y_j$ son n-integrales

(i) $dF_1, \dots, dF_n$ son l.i.

(ii) $\{H, F_j\} = 0$

(iii) $\{F_j, F_k\} = 0$.

$$D = \mathbb{R}^n \times D_2$$

Ejemplo 2

n-osciladores armónicos

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (p_j^2 + w_j^2 q_j^2), \quad w_j > 0 \text{ en } \mathbb{R}^2$$

es integrable con

$$F_j(p,q) = p_j^2 + w_j^2 q_j, \quad j = 1, \dots, n$$

debemos restringirnos al conjunto

$$D = \{(p,q) : F_1 \cdot F_2 \cdot \dots \cdot F_n \neq 0\}$$

donde las dF_j son l.i.

la transformación

$$q_j = \sqrt{\frac{2y_j}{w_j}} \cos x_j$$

$$p_j = -\sqrt{2w_j y_j} \sin x_j$$

transforma el Hamiltoniano en,

$$H = \sum_{j=1}^{n} w_j y_j = H(y_1, \dots, y_n)$$

y

$$F_j = 2 w_j y_j$$

Ejemplo 3

Sea $H = H(y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{C}^2(D_2)$

$D_2 \subseteq \mathbb{R}^n$

consideramos el flujo de X_H en

$$M = \mathbb{T}^n \times D_2$$

$\mathbb{T}^n$ es el toro de dimensión n.

$$\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$$

- Es integrable
- Tiene la propiedad de que

$$\{(x,y) : y_j = \overset{\text{constante}}{c_j}\}$$

son toros (y por lo tanto compactos).

Estas variables (x,y), $x \in \mathbb{T}^n$, $y \in D_2 \subset \mathbb{R}^n$ se llaman variables de acción-angulo.

x_j's son variables de ángulo ($x_j \in \mathbb{T}$) y las y_j son las variables de acción.

Las y_j se relacionen con la integral de acción

$$\int_\gamma \sum_{j=1}^n p_j dq_j$$

donde γ es una curva cerrada.

En el ejemplo de n-osciladores armónicos. el Hamiltoniano $H = \sum_{j=1}^n w_j y_j$

Tomamos γ coma la elipse

$$p_1^2 + w_1^2 q_1^2 = a_1, \quad p_j = p_j^0, \; q_j = q_j^0$$

para $j \geq 2$.

$$\frac{\pi a_1}{w_1} = \int_0^{2\pi} y_1 \, dx_1 = 2\pi y_1$$

Enunciado del Teorema de Arnold-Jost

Las F_j's son contantes a lo largo de las trayectorias de X_H, entonces es natural considerar conjuntos de nivel,

$$N_c = \{ m \in M : F_j(m) = c_j, \; j = 1, 2, \dots, n\}$$

son subvariedades n-dimensionales de M.

Del hecho de que

(i) $dF_1, dF_2, \dots, dF_n$ son l.i. en M.

(ii) $\{H, F_j\} = 0$ en M.

se sigue que $X_{F_1}, X_{F_2}, \dots, X_{F_n}$ expanden un espacio tangente de N_c.

- por independencia lineal y por que

$$X_{F_j}(F_k) = \{F_j, F_k\} = 0$$

De hecho, por (ii), $X_H(F_k) = 0$

$\Rightarrow$ que X_H es tangencial a N_c.

Las variedades N_c son Lagrangianas ya que

$$\Omega (X_{F_j} , X_{F_k}) = \{ F_j , F_k \} = 0$$

Notamos que la elección de integrales individuales no es importante y que podemos tomar una transformación de ellos.

Por ejemplo, tomamos $F = (F_1, \dots, F_n)$.
y funciones $\mu_k (F)$.

$$\{ \mu_k(F) , \mu_\ell (F) \} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial(\mu_k, \mu_\ell)}{\partial (F_i, F_j)} \{ F_i , F_j \}$$

estas también están dadas en involucion si el Jacobiano es no singular.

El teorema dice que una de las variedades N_{c^*} es compacta y conexa, entonces es un toro n-dimensional y en una vecindad de este toro se puede escribir el campo vectorial X_H como en el ejemplo 3.

Es decir que podemos introducir coordenadas de acción ángulo.

Sea (M, Ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$.

<u>Teorema (Arnold-Jost)</u>

Sea $F = (F_1, \dots, F_n)$ una funcion vectorial clase C^2 en la variedad simpléctica (M, Ω) y asumimos que F satisface (i), (ii), (iii).
También asumimos que la subvariedad n-dimensional $N_{c^*} := F^{-1}(c^*) \subset M$ es compacta y conexa.

Entonces,

(i) $N_{c^*} = F^{-1}(c^*)$ es un toro n-dimensional $\simeq \mathbb{T}^n$.

(ii) Hay una vecindad $U(N_{c^*}) \subset M$ donde se pueden escribir coordenada x_j, y_j de la siguiente manera.

Si $x=(x_1, x_2, \ldots x_n)$ son variables en el toro $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ y $y=(y_1,\ldots,y_n)$ $y \in D_1$ donde D_1 y D_2 son dominios en $\mathbb{R}^n$ que contienen $y=c^*$, entonces existen difeomorfismos

$$\Psi : \mathbb{T}^n \times D_1 \to \mathcal{U}(\mathcal{N}_{c^*})$$

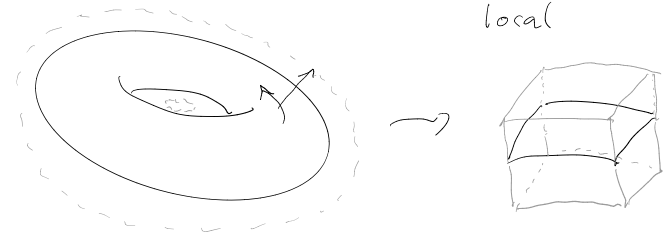
$$\mu : D_2 \to D_1 \quad , \quad \mu(c^*)=0$$

tales que

$$\mu \circ F \circ \Psi = y$$

$$\Psi^* \Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j .$$

En particular, Ψ mapea el toro $\mathbb{T}^n \times \{c^*\}$ en $\mathcal{N}_{c^*} = F^{-1}(c^*)$ y el toro $\mathbb{T}^n \times \{y\}$ en $\mathcal{N}_c \cap \mathcal{U}$ donde $y = \mu(c)$



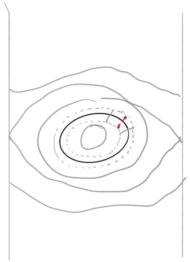
<u>Corolario</u>

Cualquier sistema Hamiltoniano integrable que está dado por H con integrales F_j se transforma por el difeomorfismo simpléctico Ψ en el siguiente sistema en $\mathbb{T}^n \times D$:

$$H \circ \Psi = h(y_1, \ldots, y_n)$$

donde x_j, y_j son coordenadas canónicas y $x \in \mathbb{T}^n$ son variables angulares módulo 1.

En particular, en $\mathcal{U}(\mathcal{N})$ el Hamiltoniano es una función de las integrales $F_1, \ldots, F_n$.



Movimiento Cuasi-periódico

Consideramos un Hamiltoniano integrable.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} p_j + (2\pi\omega_j)^2 (q_j)^2 \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} \dot{q}_j &= p_j \\ \dot{p}_j &= -(2\pi\omega_j)^2 q_j \end{aligned}$$

El flujo es

$$\varphi_j^t(q,p) = \Big(q_j \cos(2\pi\omega_j t) + \frac{p_j}{2\pi\omega_j} \sin(2\pi\omega_j t),$$

$$p_j \cos(2\pi\omega_j t) - q_j\, \omega_j \sin(2\pi\omega_j t) \Big)$$