El corchete de Poisson con respecto a una estructura simpléctica

2-forma no-degenerada Ω en una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión par

Si F es una función, denotamos X_F el campo vectorial único $X = X_F$ tal que $\Omega(X_F, \cdot) = -dF$

Def

El corchete de Poisson para dos funciones F, G se define como la función

$$\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G)$$

Por antisimetría de Ω,

$$\{F, G\} = -\{G, F\}$$

Por la no degeneración,

$$\{F, G\} = 0 \quad \forall G, \text{ entonces } dF = 0$$

Como $\Omega(X_F, \cdot) = -dF$, tenemos que

$$\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G) = -dF(X_G)$$

$$= -X_G(F)$$

y por antisimetría esto coincide con $dG(X_F) = X_F(G)$

$$\Rightarrow \{F, G\} = X_F(G) = -X_G(F)$$

Para estudiar la cerradura de Ω en términos del corchete de Poisson introducimos $J(F_1, F_2, F_3)$ para 3 funciones F_1, F_2, F_3, dada por,

$$J(F_1, F_2, F_3) = \{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\}$$

se puede probar.

Lema

(i) $[X_{F_1}, X_{F_2}](F_3) = X_{\{F_1, F_2\}}(F_3) + J(F_1, F_2, F_3)$

(ii) $(d\Omega)(X_{F_1}, X_{F_2}, X_{F_3}) = -J(F_1, F_2, F_3)$

Teorema

Si Ω es una 2-forma no-degenerada de $\mathcal{M}$, entonce la condición $d\Omega = 0$ es equivalente a cada una de las siguientes condicciones

(i) $[X_F, X_G] = X_{\{F,G\}}$

(ii) $\{F, \{G,H\}\} + \{H, \{F,G\}\} + \{G, \{H,F\}\} = 0$

(i) para cada par F, G } funciones de $\mathcal{M}$.
(iii) para cada trío F, G, H }

> Esta es la identidad de Jacobi.

Subvariedades especiales de una variedad simpléctica

Si $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$

$\mathcal{N}$ subvariedad

$\mathcal{M}$ variedad simpléctica $(\mathcal{M}, \Omega)$

$\dim \mathcal{M} = 2n$

El espacio tangente de $\mathcal{N}$

$$T_x\mathcal{N} \subset T_x\mathcal{M} \quad , \quad x \in \mathcal{N}$$

$\downarrow$

es un subespacio de un espacio vectorial simpléctico $T_x\mathcal{M}$ $\rightsquigarrow$ este tiene una estructura simpléctica, Ω_x

Si $L_x \subset T_x\mathcal{M}$ es un subespacio lineal, entonces denotamos por $L_x^\perp$ a su complemento ortogonal, es decir,

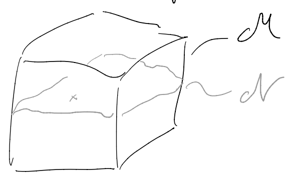
$$L_x^\perp = \{X \in T_x\mathcal{M} : \Omega_x(X,Y) = 0, \ \forall Y \in L_x\}$$

La subvariedad $\mathcal{N}$ se llama

isotrópica	si	$T_x\mathcal{N} \subseteq T_x\mathcal{N}^\perp$
co-isotrópica	si	$T_x\mathcal{N} \supseteq T_x\mathcal{N}^\perp$
Lagrangiana	si	$T_x\mathcal{N} = T_x\mathcal{N}^\perp$
Simpléctica	si	$T_x\mathcal{N} \cap T_x\mathcal{N}^\perp = \{0\}$

$\forall\, x \in \mathcal{N}$.

Sea $j : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ mapeo inclusión



$j^*\Omega$ es la restricción de Ω a $T\mathcal{N}$

↳ esto es una 2-forma en $\mathcal{N}$.

→ $j^*\Omega$ es cerrada ya que

$$d(j^*\Omega) = j^* d\Omega = 0$$

<u>Variedades isotrópicas.</u>

$T_x\mathcal{N} \subseteq T_x\mathcal{N}^\perp$ requiere que $\Omega(X,Y)=0$ $\forall\, X,Y \in T\mathcal{N}$

Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es isotrópica si $j^*\Omega=0$

<u>Variedades Lagrangianas</u>

Es una variedad isotrópica maximal: $\mathcal{N}$ tiene la mitad de la dimensión de $\mathcal{M}$ (y es isotrópica).

<u>Variedades simplécticas</u>

La condición $T_x\mathcal{N} \cap T_x\mathcal{N} = \{0\}$ es equivalente a la condicion de que $T_x\mathcal{N} \subset T_x\mathcal{M}$ es un subespacio simpléctico.

$j^*\Omega$ 2-forma, no-degenerada de $\mathcal{N}$.

$\Leftrightarrow \quad j^*\Omega(X)$ es no-degenerada.

Por lo tanto, $\mathcal{N}$ es una subvariedad simpléctica si $(\mathcal{N}, j^*\Omega)$ es una variedad simpléctica.

Notamos que

Si $\mathcal{N}$ es una variedad n dimensional dada por

$$\mathcal{N} = \{ (x, g(x)) \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*} \; ; \; x \in \mathbb{R}^n \}$$

$\mathcal{N}$ es Lagrangiana si y sólo si

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial x} G(X) \text{ para una función } G.$$

De hecho, si $j : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$ es la inclusión

$$j^*(d\theta) = d(j^*\theta) = d\langle g, dx\rangle \, ;$$

así $j^* d\theta = 0$ si y sólo si $\langle g, dx\rangle$ es cerrado y por lo tanto exacto.

Sistemas Hamiltonianos Integrables

Los sistemas integrables son sistemas con suficientes integrales de movimiento de tal manera que resolver la ecuación es trivial.

- Para un sistema en $\mathbb{R}^m$ se requieren $m-1$ integrales.
- Para un sist. Hamiltoniano en $\mathbb{R}^{2n}$ se requieren n-integrales.

Integral

Sea $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$ estructura simpléctica en $\mathbb{R}^{2n}$

con corchete de Poisson

$$\{F, G\} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_j}\frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial G}{\partial y_j} \right).$$

para cualquier funcion $H \in \mathcal{C}^2(D)$ donde D es un dominio de $\mathbb{R}^{2n}$,

$$X_H = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial y_j}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial H}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

tal que $X_H F = \{H, F\}$

Una función $F \in \mathcal{C}^1(D)$ se llama integral del campo vectorial X_H si $X_H F = 0$ pero $dF \neq 0$ en D.

$\Rightarrow$ F es constante a lo largo de las órbitas X_H.

<u>Def</u>

Un campo vectorial Hamiltoniano X_H se llama integrable en D si posee n-integrales de movimiento $F_j \in \mathcal{C}^2(D)$ y con las siguientes propiedades,

(i) $dF_1, dF_2, \dots, dF_n$ son linealmente independientes en D

(ii) $\{H, F_j\} = 0$ en D

(iii) $\{F_j, F_k\} = 0$ en D.

En variedades simplécticas $(\mathcal{M}, \Omega)$ X_H está definido por

$$\Omega(X_H, \cdot) = -dH \quad \text{para} \quad H \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M})$$

y $\{F, G\} = \Omega(X_F, X_G)$.

X_H es integrable en $(\mathcal{M}, \Omega)$ siempre que (i), (ii), (iii) se satisfacen con D reemplazado por $\mathcal{M}$.

<u>Def</u>

Un campo vectorial Hamiltoniano X_H se llama integrable en $\mathcal{M}$ si posee n-integrales de movimiento $F_j \in \mathcal{C}^2(\mathcal{M})$ y con las siguientes propiedades,

(i) $dF_1, dF_2, \dots, dF_n$ son linealmente independientes en $\mathcal{M}$

(ii) $\{H, F_j\} = 0$ en $\mathcal{M}$

(iii) $\{F_j, F_k\} = 0$ en $\mathcal{M}$.

//