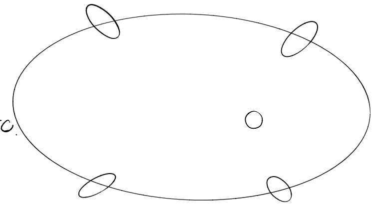
Cuerpos celestes en resonancia de órbita-espín.

- Luna 1 a 1
- Io, Europa, Ganymede, Titan, Dione, Rhea, etc. 1:1

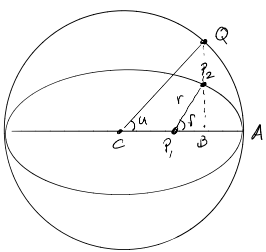


- Mercurio 3:2
  2 vueltas alrededor del sol
  3 rotaciones sobre su eje.

¿Porqué tantas resonancias?

¿Porqué algunos cuerpos están en resonancia y otros no?

Órbita Kepleriana elíptica



r – radio
u – anomalía eccentrica
f – anomalía verdadera.

e – eccentricidad

Ecuaciones de Kepler

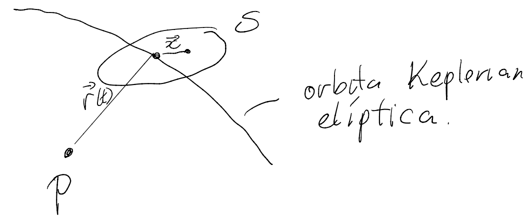
$$\tan\frac{f}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

$$l_0 = u - e\sin u$$

movimiento medio

$$l_0 = \frac{2\pi}{T}(t - t_0)$$

Cuerpo rígido



S es un cuerpo rígido de masa m, sujeto a la atracción gravitacional de una masa puntual P, M.

El cuerpo rígido se mueve en una órbita Kepleriana con radio $\vec{r}(t)$ entre P y el baricentro de S

$|S|$ volumen de el satélite y $\vec{x}$ la posición con respecto al baricentro de una partícula en S

$$\tilde{U} = -\int_S \frac{GMm}{|\vec{r}(t) + \vec{x}|}\frac{d\vec{x}}{|S|}$$

Potencial de atracción entre P y S

Desarrollamos $\tilde{u}$ en armónicos esféricos

$$\tilde{u} = -GM \sum_{i=1}^{i} \sum_{j=1}^{i} \frac{1}{r^{i+1}} P_{ij}(\sin\theta)\left(C_{ij}\cos j\phi + S_{ij}\sin j\phi\right)$$

Tomar el primer orden equivale a aproximar el cuerpo por una elipsoide.

$r = |\vec{r}|$

ϕ longitud

θ latitud

P_{ij} funciones de Legendre

$$P_{ij}(\sin\theta) = \cos j\theta \sum_{k=1}^{n} T_{ijk} \sin^{i-j-2k}\theta$$

$$n = \left[\frac{i-j}{2}\right]$$

$$T_{ijk} = \frac{(-1)^k (2i-2k)!}{2^i k! (i-k)! (i-j-2k)!}$$

A primer orden significativo, $\tilde{u}_2$, el potencial es,

$$\tilde{u}_2 = -\frac{GMm}{r}\left(\frac{Re}{r}\right)^2 \left[C_{20} P_2(\sin\theta) + C_{22} P_{22}(\sin\theta)\cos 2\phi\right]$$

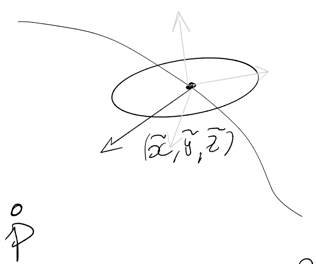
Re radio ecuatorial de $\mathcal{S}$

$P_2(\sin\theta)$ polinomio de Legendre de segundo orden (I_i momentos principales de inercia).

$$C_{20} = \frac{1}{2}\frac{1}{mRe^2}(I_1 + I_2 - 2I_3)$$

$$C_{22} = \frac{1}{4}\frac{1}{mRe^2}(I_2 - I_1)$$

Denotamos por $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ las coords del vec. unitario orientado hacia $\mathring{P}$ en el marco del cuerpo.



$$\tilde{x} = \cos\phi\cos\theta$$
$$\tilde{y} = \sin\phi\cos\theta$$
$$\tilde{z} = \sin\theta$$

$$P_2(\sin\theta) = \frac{2\tilde{z}^2 - \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2}{2}$$

$$P_{22}(\sin\theta)\cos 2\phi = 3(\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2).$$

$R_1(\alpha)$, $R_2(\alpha)$, $R_3(\alpha)$

rotaciones c.r.a. eje del subíndice.

Si f es la anomalía verdadera de $\mathcal{S}$ en la órita,

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = R_3(l) R_1(J) R_3(g) R_1(K) R_3(h) \begin{pmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{pmatrix}$$

A finales del 17 G.D. Cassini

3 leyes del movimiento de la luna

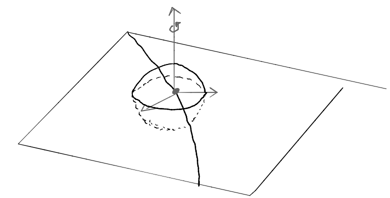
($J = K = 0$, $\tau = l = h = 0$)

(1) La Luna rota alrededor de su eje principal en una resonancia síncrona.

(2) El eje de rotación y la órbita normal forman un ángulo constante ($K = cte$)

(3) El eje de rotación, la normal a la órbita y la normal a la eclíptica están en el mismo plano.

Asumimos que los ejes principales de rotación están fijos



λ_1 ángulo de rotación c.r.a eje z.

$$\tilde{U}_2 = -\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{a}{r(t)}\right)^3 I_3 \cos(2\lambda_1 - 2f(t))$$

El Hamiltoniano es.

$$H_0(\Lambda_1, \lambda_1, t) = \frac{\Lambda_1^2}{2I_3} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{a}{r(t)}\right)^3 I_3 \cos(2\lambda_1 - f(t))$$

Ojo depende del tiempo a través de $r(t)$ y $f(t)$.

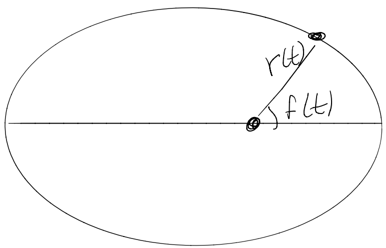
Cambio de variables

$$y = \frac{\Lambda_1}{I_3}, \quad x = \lambda_1$$

$$H(y,x,t) = \frac{y^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^3 \cos(2x - 2f)$$

- Este depende del tiempo. $\downarrow$
- La dependencia es periódica.

$r(t)$, $f(t)$



- Sección de Poincaré
- $\mathcal{L}_X \Omega = 0$