Como $d\Omega = 0$ y por la fórmula mágica de Cartan

$$\mathcal{L}_X \Omega = d(i_X \Omega) + \cancel{i_X d\Omega}^{\,0}$$
$$= d(i_X \Omega) = d\alpha = 0$$

esto es equivalenta a

$$\mathcal{L}_X \Omega = 0$$

El campo vectorial se llama Hamiltoniano exacto si la 1-forma no es sólo cerrada sino también exacta.

$$\alpha = dH \quad , \quad H \text{ función de } M.$$

y H se llama la función Hamiltoniana.

Todo campo vectorial Hamiltoniano es localmente Hamiltoniano exacto gracias al lema de Poincaré-Cartan.

Ejemplo

Sea la variedad simpléctica $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ (x, y)

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j \quad (x_j \bmod 1)$$

la forma

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k \, dx_k, \quad a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$$

es cerrada pero no exacta si $a \neq 0$.

Unicamente en el espacio cubriente $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ teremos $\alpha = dH$ con $H = \langle a, x \rangle$

El campo vectorial Hamiltoniano está dado por

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = a.$$

que no es un campo vectorial Hamiltoniano exacto.

Relacionamos estos campos Hamiltonianos con los de $\mathbb{R}^{2n}$ usando las coordenadas.

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$$

si $\quad X_\alpha = \sum_{j=1} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$

y α es la 1-forma correspondiente

$$\alpha = -dH = -\sum_{j=1}^{n} (H_{x_j} dx_j + H_{y_j} dy_j)$$

entonces

$$i_X \Omega = i_X \sum dy_j \wedge dx_j$$

$$= \sum (i_X dy_j) dx_j - (i_X dx_j) dy_j$$

$$= \sum (b_j \, dx_j - a_j \, dy_j)$$

$$i_X \Omega = \alpha \Rightarrow \quad a_j = H_{y_j} \text{ y } b_j = -H_{x_j}$$

$$X_\alpha = \sum_{j=1}^{n} \left(H_{y_j} \frac{\partial}{\partial x_j} - H_{x_j} \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

Ésto corresponde con la definición de campos Hamiltonianos que teníamos en $\mathbb{R}^{2n}$.

__Teorema__

Un campo vectorial X con flujo φ_t es Hamiltoniano si y sólo si φ_t es simpléctico para toda t.

__Dem__

X es Hamiltoniano $\Rightarrow \mathcal{L}_X \Omega = 0$

entonces

$$\frac{d}{dt} (\varphi_t)^* \Omega = (\varphi_t)^* (\mathcal{L}_X \Omega) = 0$$

$$\Rightarrow (\varphi_t)^* \Omega = \text{cte.} = \Omega$$

$$(\varphi_0)^* \Omega = \Omega$$

Ahora si φ_t es simpléctico $(\varphi_t^*)\Omega = \Omega \; \forall t$

$$0 = \frac{d}{dt} (\varphi_t)^* \Omega = (\varphi_t)^* (\mathcal{L}_X \Omega) \quad \forall t$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_X \Omega = 0 \quad \text{(Hamiltoniano)}$$

Denotamos un campo Hamiltoniano exacto X por

$$\Omega(X, \cdot) = -dH \quad y \quad X = X_H$$

Notar que H está determinado modulo un constante siempre que la variedad sea conexa.

La función H es una primera integral.

Sea φ_t el flujo de X_H,

$$\frac{d}{dt} H(\varphi_t(x)) = dH(X_H) \circ \varphi_t$$
$$= -\Omega(X_H, X_H) \circ \varphi_t = 0$$

para toda $x \in M$, consecuencia de la antisimetría de Ω.

Tenemos el siguiente teorema.

Teo

Sea (M_1, Ω_1) y (M_2, Ω_2) dos variedades simplécticas y $\psi: M_1 \to M_2$ es difeomorfismo. Entonces si ψ es simpléctico si y sólo si $\psi^* X_H = X_K$ donde $K = H \circ \psi$ para H en M_2.

Dem

Asumimos que ψ simpléctica

$$\psi^* \Omega_2 = \Omega_1 \quad y \quad X = X_H$$

Entonces

$$d(H \circ \psi) = \psi^* d\overset{\overset{-\Omega(X_H, \cdot)}{\parallel}}{H} = -\psi^*(i_{X_H} \Omega_2) = -i_{\psi^* X_H}(\psi^* \Omega_2)$$

$$= -i_{\psi^* X_H} \Omega_1 = -\Omega_1(\psi^* X_H, \cdot)$$

Este es Hamiltoniano exacto en (M_1, Ω_1)

$$\psi^* X_H = X_{H \circ \psi} = X_K.$$

El converso es similar. //

Observamos que si (M, Ω) es una variedad simplectica exacta, $\Omega = d\alpha$, entonces el flujo φ_t de un campo Hamiltoniano exacto $X = X_H$ consiste de mapeos exactos simplécticos.

$$(\varphi_t)^* \alpha - \alpha = d(f_t) \text{ para } f_t \text{ función}$$

De hecho $\varphi_0 = id$.

$$(\varphi_t)^*\alpha - (\varphi_0)^*\alpha = \int_0^t \frac{d}{ds}(\varphi_s)^*\alpha \, ds$$

el integrando

$$\frac{d}{ds}(\varphi_s)^*\alpha = (\varphi_s)^*\mathcal{L}_X\alpha$$

$$= (\varphi_s)^*\left(i_X d\alpha + d(i_X\alpha)\right)$$

$$= (\varphi_s)^*\left(-dH + d\alpha(X)\right)$$

$$= d(\varphi_s)^*\left(-H + \alpha(X)\right)$$

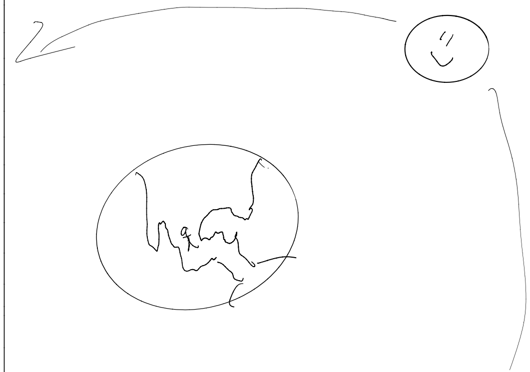
$$= d\left([-H+\alpha(X)]\circ\varphi_s\right)$$

$$d\int_0^t [(-H+\alpha(X))\circ\varphi_s]\,ds$$

$$\exists \quad f_t = \int_0^t [(-H+\alpha(X))\circ\varphi_s]\,ds$$

En el sistema solar, hay muchos satélites que están en resonacias (1 a 1 y otras)

La luna esta en una resonancia 1 a 1



Suposiciones

- La luna se desplaza en una órbita Kepleriana. (una elipse)
- Para ver la orientación asumimos que la luna es un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje perpendicular al eje de la eclíctica. (plano que contiene a la elipse).