Podemos ver a $T^*\mathcal{N}$ como variedad diferenciable de dim $2n$.

Coordenadas locales

$x_1, \dots, x_n$ coordenadas locales de $\mathcal{N}$

$\alpha \in T_p^*\mathcal{N}$ con coordenadas $y_1, \dots, y_n$

$(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ coordenadas locales de $T^*\mathcal{N}$.

Definimos una 1-forma Θ en $T^*\mathcal{N}$

$$\Theta = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j \quad \text{(tiene sentido local)}$$

Veamos que Θ tiene sentido global.

Un punto $T^*\mathcal{N}$ se representa por una 1-forma α_p evaluada en $p \in \mathcal{N}$.

Para cualquier vector $V \in T_p\mathcal{N}$ podemos $\alpha_p(V)$.

Definimos una 1-forma en $T^*\mathcal{N}$, llamada β, dando $\beta(X)$ para cualquier vector tangente X de $T^*\mathcal{N}$.

X vector tangente en un punto $\alpha \in T^*\mathcal{N}$

$\alpha_p(d\pi X)$ un funcional lineal

Mapeo proyección

$$\pi : T^*\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}$$
$$\alpha = (p, \alpha_p) \longmapsto p$$

$d\pi$ mapea el espacio tangente $T_\alpha(T^*\mathcal{N})$ en α al espacio tangente $T_p\mathcal{N}$.

Esta forma $\alpha_p(d\pi X)$ a veces se llama forma tautológica (definida en términos de sú misma).

Definimos una 1-formo Θ en $T^*\mathcal{N}$ por

$$\Theta_\alpha(X) = \alpha_p(d\pi X), \quad X \in T_\alpha(T^*\mathcal{N})$$

Por construcción esta forma coincide con $\Theta = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j$ en coordenadas locales.

Sea $X = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$, $d\pi X = \sum_{j=1}^{n} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$\alpha_p = \sum_{j=1}^{n} y_j dx_j$, $\quad \alpha_p(d\pi X) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$

$$\Theta_\alpha(X) = \sum_{j=1}^{n} a_j y_j$$

$$\theta = \sum_{j=1}^{n} y_j \, dx_j \Rightarrow d\theta = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$$

y concluimos que $\omega = d\theta$ es cerrada y no degenerada.

Una 2-forma simpléctica de $T^*\mathcal{N}$.

Notamos que el haz tangente también tiene una estructura simpléctica. $T\mathcal{N}$.

- El fibrado tangente se puede mapear difeomorficamente en el fibrado cotangente. (La forma simpléctica ω se puede mapear por el pullback a una forma simpléctica en $T\mathcal{N}$).
- Usando La métrica de $\mathcal{N}$ (siempre existe).

  La métrica define un producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ en $T_p\mathcal{N}$ y esta induce un isomorfismo $X \longrightarrow \langle X, \cdot \rangle_p$ del espacio tangente al espacio cotangente

Los fibrados cotangentes son ejemplos de variedades simplécticas.

De hecho son variedades exactas simplécticas ya que la forma es también exacta $\Omega = d\theta$. para la 1-forma θ en la variedad.

A continución...

Siempre hay coordenadas locales en las cuales la forma simpléctica ω se representa por un forma constante

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$$

Teorema de Darboux

Supongamos que ω es una 2-forma no-degenerada en una variedad $\mathcal{M}$ de dimensión $2n$.
Entonces $d\Omega = 0$ si y sólo si para cada punto $p \in \mathcal{M}$ existen coordenadas $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi : (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \to q \in \mathcal{U}$ tales que

$$\varphi(0) = p \quad y \quad \varphi^* \Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j .$$

Nota

Las coordenadas se llaman coordenadas canónicas (ó simplécticas). No son únicas y están relacionadas por transformaciones canónicas.

Dem

Sea Ω una 2-forma en $\mathcal{M} = \mathbb{R}^{2n}$ y p corresponde con $x = 0$.

Por un cambio de coordenadas lineal, podemos poner a la 2-forma en su forma normal en el origen,

$$\Omega = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j \quad \text{en} \quad x = 0 .$$

Denotamos por $\Omega_0 = \sum_{j=1}^{n} dy_j \wedge dx_j$ en $\mathbb{R}^{2n}$.

Debemos encontrar un difeomorfismo φ tal que $\varphi^* \Omega = \Omega_0$ en una vecindad del origen.

Argumento de deformación

Interpolamos Ω y Ω_0 por una familia de $\Omega_t = \Omega_0 + t(\Omega - \Omega_0)$

$0 \le t \le 1$.

$t = 0$ entonces $\Omega_t = \Omega_0$

$t = 1$ $\quad \Omega_t = \Omega$

Buscamos una familia de difeomorfismos φ_t tales que $\varphi_0 = $ identidad y $(\varphi_t)^* \Omega_t = \Omega_0$, $0 \le t \le 1$.