Derivada de Lie para campos vectoriales

$$\mathcal{L}_X Y = \frac{d}{dt}(\varphi_t)^* Y\Big|_{t=0} = [X,Y]$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t)^* Y\Big|_{t=0}(f) = \frac{d}{dt}\left(d(\varphi_{-t}) Y \circ \varphi_t\right)\Big|_{t=0}(f)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{d\varphi_{-t} Y - Y}{t}(f) = \lim_{t\to} d\varphi_{-t} \frac{Y - d\varphi_t Y}{t}(f)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{Y(f) - d\varphi_t Y(f)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{Y(f) - Y(f\circ\varphi_t)\circ\varphi_t^{-1}}{t}$$

Escribimos $\varphi_t(x) = \varphi(t,x)$ + Taylor a $f\circ\varphi_t$

$$f(\varphi(t,x)) = f(x) + t\, h(t,x)$$

donde

$$h(0,x) = \frac{\partial}{\partial t} f(\varphi(t,x))\Big|_{(0,x)}$$

Nos damos cuenta que

$$X(f) = \frac{\partial}{\partial t} f\circ\varphi_t(x)\Big|_{(0,x)}$$

$$L_X Y(f) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{Y(f) - Y(f)\circ\varphi_t^{-1}}{t} - Y(h(t,x))\circ\varphi_t^{-1}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{(Y(f)\circ\varphi_t - Y(f))\circ\varphi_t^{-1}}{t} - Y(h(t,x))\circ\varphi_t^{-1}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} Y(f)\circ\varphi_t(x)}_{X(Y(f))} - Y(\overbrace{h(0,x)}^{X(f)})$$

$$= X(Y(f)) - Y(X(f)) = [X,Y](f)$$

Corchete de Lie.

$$\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$$

Propiedades del corchete de Lie.

(a) $[X,Y]$ es bilineal

(b) $[X,Y]=-[Y,X]$

(c) $[X,fY]=X(f)Y+f\cdot[X,Y]$

(d) Identidad de Jacobi

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

Ejemplo

1) $\mathbb{R}^n$ $\quad X=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $\quad Y=\frac{\partial}{\partial x_k}$

$$[X,Y](h)=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial h}{\partial x_k}\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_k}-\frac{\partial^2 h}{\partial x_k\partial x_i}=0$$

Por lema de Schwartz $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_k}=\frac{\partial^2 h}{\partial x_k\partial x_i}$

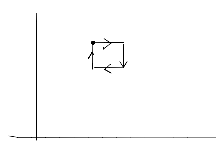
$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i},\frac{\partial}{\partial x_k}\right](h)=0$$

En $\mathbb{R}^2$

$X=\frac{\partial}{\partial x}$, $\quad Y=\frac{\partial}{\partial y}$

$\varphi^X_t(x,y)=(x+t,y)$

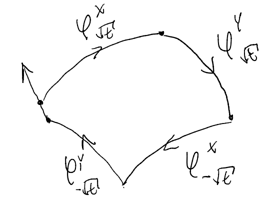
$\varphi^Y_t(x,y)=(x,y+t)$



$\varphi^Y_{-t}\varphi^X_{-t}\varphi^Y_t\varphi^X_t=id.$

Hay una definición de la derivada de Lie a través de los flujos φ^X_t y φ^Y_t asociados a X,Y.

$$[X,Y]_p=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\left(\varphi^Y_{-\sqrt{t}}\circ\varphi^X_{-\sqrt{t}}\circ\varphi^Y_{\sqrt{t}}\circ\varphi^X_{\sqrt{t}}\right)(p)$$



Teorema

X,Y campos vectoriales de M

$[X,Y]=0$ si y solo si los flujos conmutan localmente.

($p\in M$ y tiempos suf pequeños t,s entonces $(\varphi^Y_t\circ\varphi^X_s)(p)=(\varphi^X_s\circ\varphi^Y_t)(p)$)

Para evaluar derivadas de Lie tenemos la Fórmula mágica de Cartan (E. Cartan).

α - k-forma

$$\mathcal{L}_X \alpha = i_X(d\alpha) + d(i_X \alpha)$$

Notación

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

Otra identidad

$$i_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, i_Y]$$

Expresiones explícitas de la derivada exterior

α - una 1-forma.

$$d\alpha(X,Y) = \mathcal{L}_X \alpha(Y) - \mathcal{L}_Y \alpha(X) - \alpha(\mathcal{L}_X Y)$$

Como $\mathcal{L}_X f = X(f)$ y $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$

$$d\alpha(X,Y) = X(\alpha(Y)) - Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$$

Para k-formas

$$d\alpha(X_0,\dots,X_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \mathcal{L}_{X_i}(\alpha(X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,X_k))$$

$$+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j} \alpha(\mathcal{L}_{X_i}(X_j), X_0,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_k)$$

Para ω una 2-forma

$$d\omega(X_1,X_2,X_3) = X_1\omega(X_2,X_3) + X_2\omega(X_3,X_1) + X_3\omega(X_2,X_1)$$

$$-\omega([X_1,X_2],X_3) - \omega([X_2,X_3],X_1) - \omega([X_3,X_1],X_2)$$

Estructuras simplécticas en variedades

Formalismo Hamiltoniano en variedades.

- La estructura simpléctica

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} dy_i \wedge dx_j \quad \text{en } \mathbb{R}^{2n}$$

ahora la extendemos para una variedad $\mathcal{M}^{2n}$ (2n-dimensional)

Def

Una estructura simpléctica en $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{2n}$ es una 2-forma ω en $\mathcal{M}$ que es

(i) ω es cerrada ($d\omega = 0$)

(ii) ω es no degenerada.

($p \in \mathcal{M}$ y $X \in T_p\mathcal{M}$, $X \neq 0 \Rightarrow \exists$ un vector $Y \in T_p\mathcal{M}$ con $\omega(X, Y) \neq 0$).

El par $(\mathcal{M}, \omega)$ se llama <u>variedad simpléctica</u>.

- Todo espacio tangente $T_p\mathcal{M}$ es un espacio vectorial 2n-dimensional se vuelve un espacio vectorial simpléctico con respecto una 2 forma bilineal, antisimétrica y no degenerada ω_p en p.

Haz cotangente de una variedad

Sea $\mathcal{N}$ una variedad de dimensión n,

y $T_p\mathcal{N}$ espacio tangente sobre $p \in \mathcal{N}$.

Sea $T_p^*\mathcal{N}$ el espacio dual $T_p\mathcal{N}$.
(formas lineales definidas sobre $T_p\mathcal{N}$)

$T_p^*\mathcal{N}$ es el <u>espacio cotangente</u>.

La unión de espacios cotangentes se llama haz cotangente.
(bundle (Eng), fibrado)

$$T^*\mathcal{N} = \bigcup_{p \in \mathcal{N}} T_p^*\mathcal{N}.$$

Esto es una variedad $\mathcal{M} = T^*\mathcal{N}$

Un punto α en $\mathcal{N}$ es una forma lineal α_p definida en espacio tangente $T_p\mathcal{N}$ sobre $p \in \mathcal{N}$.

$\alpha = (p, \alpha_p) \rightsquigarrow$ un punto $\alpha \in \mathcal{M}$.

Variedad diferenciable
- dim $2n$
- estructura simpléctica.