$$= e^{2u}\cos^2 v\,(e^u\cos v\,du - e^u \sin v\,dv)$$
$$- e^{e^u\cos v}(e^u \sin v\,du + e^u\cos v\,dv)$$

$$= \left(e^{3u}\cos^3 v - e^{u+e^u\cos v}\sin v\right)du$$
$$- \left(e^{3u}\cos^2 v\sin v + e^{u+e^u\cos v}\cos v\right)dv$$

1-forma en $\mathbb{R}^2$ (dominio).

Proposición

El pullback de un producto cuña es el producto cuña de los pull-backs

$$f^*(\alpha\wedge\beta) = f^*\alpha\wedge f^*\beta$$

"El saltapatrás de las cuñas es la cuña de los saltapatrases"

Ejemplo

$$f: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(\theta_1,\theta_2) \longmapsto (e^{\theta_1}\cos\theta_2, e^{\theta_1}\sin\theta_2) = (\phi,\psi)$$

$$\alpha = d\phi\wedge d\psi$$

$$f^*\alpha = d(e^{\theta_1}\cos\theta_2)\wedge d(e^{\theta_1}\sin\theta_2)$$
$$= (e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_1 - e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_2)$$
$$\wedge (e^{\theta_1}\sin\theta_2\,d\theta_1 + e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_2)$$

$$= e^{2\theta_1}\cos^2\theta_1\,d\theta_1\wedge d\theta_2 - e^{2\theta_1}\operatorname{sen}^2\theta_1\,d\theta_2\wedge d\theta_1$$

$$(d\theta_1\wedge d\theta_2 = - d\theta_2\wedge d\theta_1)$$

$$= e^{2\theta_1}\,d\theta_1\wedge d\theta_2$$

Producto interior

Sea α una k-forma en una variedad M y X un campo vectorial.

El producto interior $i_X\alpha$ (también llamado contracción) se define por

$$(i_X\alpha)(v_2,\dots,v_k) = \alpha_p(X(p), v_2,\dots,v_k)$$

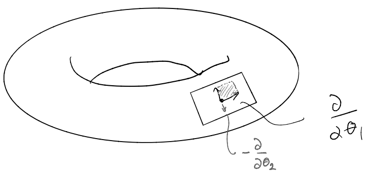
lleva una k-forma en una $(k-1)$-forma.

Ejemplo

$\mathcal{M} = \mathbb{T}^2$

$d\theta_1$ y $d\theta_2$ 2 1-formas en el toro $\mathbb{T}^2$

$$X = -\frac{\partial}{\partial \theta_2} \quad \text{y} \quad \alpha = d\theta_1 \wedge d\theta_2$$



$$i_X \, d\theta_1 \wedge d\theta_2 (v) = i_{-\partial/\partial\theta_2} \, d\theta_1 \wedge d\theta_2 (v)$$

$$= d\theta_1 \wedge d\theta_2 \left(-\frac{\partial}{\partial\theta_2}, v\right)$$

$$= \cancelto{0}{d\theta_1\left(-\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)} \cdot d\theta_2(v) - \cancelto{-1}{d\theta_2(-\partial/\partial\theta_2)} \cdot d\theta_1(v)$$

$$= d\theta_1(v)$$

$$i_X \, d\theta_1 \wedge d\theta_2 = d\theta_1$$

Proposición

Sea α una k-forma y β una l-forma en una variedad $\mathcal{M}$.

Entonces

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = (i_X \alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (i_X \beta)$$

Prop

La derivada exterior conmuta con el pull-back

$$d(f^* \alpha) = f^* d\alpha$$

donde α es una k-forma en $\mathcal{N}$ y $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ mapeo suave entre variedades.

Def

Decimos que una k-forma α es exacta si existe una $(k-1)$-forma β tal que

$$\alpha = d\beta$$

Ejemplo

$$\mathcal{M} = \mathbb{T} \times \mathbb{R} \qquad (\theta, p)$$

$\beta = p\,d\theta \qquad d\beta = dp \wedge d\theta = \alpha$

α es una forma exacta.

$f : \mathbb{T}\times\mathbb{R} \to \mathbb{T}\times\mathbb{R}$

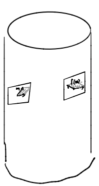
$f(\theta,p) = (\theta + p + \sin(\theta),\ p + \sin(\theta))$

$\beta = p\,d\theta$

$$f^*\beta = (p + \sin(\theta))\,(d\theta + dp + \cos(\theta)\,d\theta)$$
$$= (p+\sin(\theta))(1+\cos(\theta))\,d\theta + (p + \sin(\theta))\,dp$$

$$d(f^*\beta) = f^* d\beta = f^*\alpha$$
$$= dp\wedge d\theta + \cancel{\cos(\theta)\,dp\wedge d\theta} + \cancel{\cos(\theta)\,d\theta\wedge dp}$$
$$= dp \wedge d\theta$$

$$f^*\alpha = d(p + \sin(\theta)) \wedge d(\theta + p + \sin(\theta))$$
$$= dp \wedge d\theta$$



$f^*\alpha = \alpha$

Lema de Poincaré - Cartan

Una forma cerrada es localmente exacta.

- si $d\alpha = 0$ cerrada, entonces existe una vecindad de cada punto y una $(k-1)$-forma tal que $\alpha = d\beta$.

$$(d\alpha)(v_0,\dots,v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i v_i \left[\alpha(v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,v_k)\right]$$
$$+ \sum_{0\le i<j\le k} (-1)^{i+j}\, \alpha\left([v_i,v_j], v_0,\dots,\hat{v}_i,\dots,\hat{v}_j,\dots,v_k\right)$$

Dem

$$\beta(v_1,\dots,v_k) = \int_0^1 t^{k-1} \alpha^{j,i_1,\dots,i_k}(tv_1,\dots,tv_k)\,v_j\,dt \quad dv_{i_1}\wedge\dots\wedge dv_{i_{k-1}}$$

Derivar....

La derivada de Lie

Sea α una k-forma y X un campo vectorial con flujo φ_t. La derivada de Lie de α a lo largo de X está dada por

$$\mathcal{L}_X \alpha = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t} = \frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha \Big|_{t=0}$$

De la definición tenemos que

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha = \frac{d}{ds}\varphi_{t+s}^*\alpha\Big|_{s=0} = \frac{d}{ds}\varphi_t^*\varphi_s^*\alpha\Big|_{s=0} = \varphi_t^*\frac{d}{ds}\varphi_s^*\alpha\Big|_{t=0}$$

$$(\varphi_{t+s} = \varphi_s\circ\varphi_t) \quad ((f\circ g)^*\alpha = g^* f^*\alpha)$$

Teorema de la derivada de Lie.

$$\frac{d}{dt}\varphi_t^*\alpha = \varphi_t^*\mathcal{L}_X\alpha$$

La derivada de Lie para funciones y campos vectoriales se puede generalizar usando la definición de pull-back.

En el caso de una función f en M la derivada de Lie de f a lo largo de un campo vectorial X es la derivada direccional

f - función - 0-forma

$$\mathcal{L}_X f = \frac{d}{dt}f(\varphi_t)\Big|_{t=0} = X(f) := df\cdot X$$

En coordenadas. x_i

$$X(f) = \sum X_i\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$df\cdot X = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\left(\sum X_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum\frac{\partial f}{\partial x_i}X_i$$

La proxima clase... Y campo vectorial

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

conmutador

El corchete de Lie.