Recíprocamente, si tenemos campos vectoriales escritos en coordenadas locales, estos definen un campo vectorial en $\mathcal{M}$ si satisfacen las condiciones de compatibilidad (Comp) para los correspondientes mapeos de transición.

De forma alternativa, podemos definir un campo vectorial X

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j} \qquad \text{donde } f = (f_1, \dots, f_n)$$

es la función vectorial de antes.

Consideramos cualquier curva $t \mapsto \varphi^{-1} \circ c(t) = x(t)$,
La curva pasa por $x(0) = x$ y tiene el vector tangente

$$\frac{d}{dt} (\varphi^{-1} \circ c)(0) = f(x) \in \mathbb{R}^n$$

Si luego F es una función de $\mathbb{R}^n$ tenemos que,

$$\frac{d}{dt} F(\varphi^{-1} \circ c(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}$$

es decir, esta es la derivación de F en la dirección del campo vectorial f en x.

Si tenemos difeomorfismos $F: \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ entre 2 variedades de la misma dimensión, esto da lugar a una transformación de campos vectoriales que va hacia atrás de $T\mathcal{M}_1$ hacia $T\mathcal{M}$ y se llama un "pullback". Esta mapea un campo vectorial Y en $\mathcal{M}_1$, en un campo vectorial $X = F^*(Y)$ en $\mathcal{M}$ definido por

$$F^*(Y)(p) = d(F^{-1})\, Y \circ F(p) \qquad (PB).$$

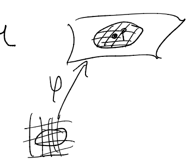
Formas diferenciales en variedades

Una k-forma α asocia a todo punto $p \in \mathcal{M}$ una forma k-multilineal α_p antisimétrica sobre el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$.

$$\alpha_p(X_1, \dots, X_k), \quad X_j \in T_p\mathcal{M}$$

En coordenadas locales, $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathcal{M}$

$$\alpha_x = \sum a^{i_1 \dots i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$



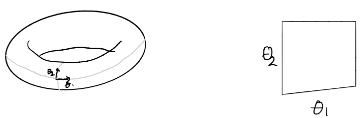
La forma $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$ en $\mathbb{R}^n$ se define como

$$dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(v_1, \dots, v_k) = \det \begin{pmatrix} dx_{i_1}(v_1) & \dots & dx_{i_k}(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ dx_{i_1}(v_k) & \dots & dx_{i_k}(v_k) \end{pmatrix}$$

$dx_i(v_j)$ es la i-ésima forma evaluada en en j-ésimo vector.

__Ejemplo__

Consideramos el toro en coordenadas locales θ_1, θ_2



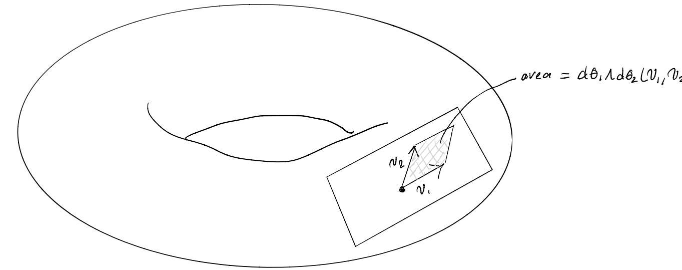
Cabe remarcar que

- θ_1, θ_2 no son coordenadas globales.
- $d\theta_1$ y $d\theta_2$ son coordenadas globales del espacio cotangente.

2-forma

$$d\theta_1 \wedge d\theta_2 (v_1, v_2) = \det \begin{pmatrix} d\theta_1(v_1) & d\theta_2(v_1) \\ d\theta_1(v_2) & d\theta_2(v_2) \end{pmatrix}$$

$$= d\theta_1(v_1)\, d\theta_2(v_2) - d\theta_1(v_2)\, d\theta_2(v_1)$$



__Derivada exterior__

La derivada exterior __$d\alpha$__ de una k-forma α en $\mathcal{M}$ es la $(k+1)$-forma de $\mathcal{M}$ que satisface

(i) Si $\alpha = f$ (función 0-forma), entonces df es la 1-forma de la derivada.

(ii) $d\alpha$ es lineal en α.

(iii) $d\alpha$ satisface la regla del producto

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$$

donde α es una k-forma y β es una l-forma

(iv) $d^2 = 0$, i.e., $d(d\alpha) = 0$, $\forall$ k-forma α.

$d(d\theta_i) = 0$

(v) d es un __operador local__ i.e. $d\alpha_p$ depende sólo de α restringido a cualquier vecindad abierta de p.

Si $\mathcal{U}$ abierto de $\mathcal{M}$ entonces $d(\alpha|_{\mathcal{U}}) = (d\alpha)|_{\mathcal{U}}$.

Localmente, la derivada exterior se escribe como

$$(d\alpha)_x = \sum \left(\sum \frac{\partial a^{i_1 \dots i_k}}{\partial x_s}(x)\, dx_s \right) \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$

y es invariante bajo cambios de coordenadas

→ $d(u^*\alpha) = u^* d\alpha$ se cumple para cualquier difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$.

(M) d se visualiza como una operación sobre la variedad que mapea k-formas en $(k+1)$-formas.

Un mapeo $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_1$ entre variedades da lugar a un mapeo de "pull-back" ("saltapatrás"), f^*, que mapea formas en $\mathcal{M}_1$ hacia atrás en formas de $\mathcal{M}$.

Se define como,

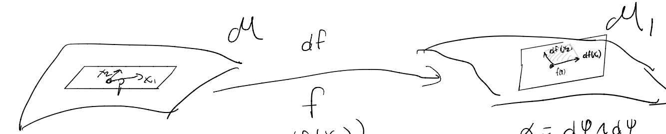
si α es un k-forma en $\mathcal{M}_1$, entonces $f^*\alpha$ es la k-forma en $\mathcal{M}$,

$$(f^*\alpha)_p (X_1, \dots, X_k) = \alpha_{f(p)} (df(X_1), \dots, df(X_k))$$

para $p \in \mathcal{M}$, $X_i \in T_p(\mathcal{M})$

__Nota__

- Está bien definida, por definición del mapeo tangente $df(X_j) \in T_{f(p)}\mathcal{M}_1$



$$f^*\alpha = df_1 \wedge df_2 \,(df(x_1), df(x_2))$$

__Ejemplo__

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \mapsto (e^u \cos v,\ e^u \sin v) = (x,y)$$

y la 1-forma

$$\alpha = x^2 dx - e^x dy \qquad ¿f^*\alpha?$$

$$\begin{aligned} f^*\alpha &= \alpha_1(e^u \cos v,\ e^u \sin v)\, dx \\ &\quad + \alpha_2 (e^u \cos v,\ e^u \sin v)\, dy \\ &= e^{2u} \cos^2 v \; d(e^u \cos v) \\ &\quad - e^{e^u \cos v} d(e^u \sin v) \\ &= e^{2u} \cos^2 v\, (e^u \cos v\, du - e^u \sin v\, dv) \\ &\quad - e^{e^u \cos v} (e^u \sin v\, du + e^u \cos v\, dv) \end{aligned}$$

$$= e^{2u}\cos^2 v\,(e^u\cos v\,du - e^u\sin v\,dv) - e^{e^u\cos v}(e^u\sin v\,du + e^u\cos v\,dv)$$

$$= \left(e^{3u}\cos^3 v - e^{u+e^u\cos v}\sin v\right)du - \left(e^{3u}\cos^2 v\sin v + e^{u+e^u\cos v}\cos v\right)dv$$

1-forma en $\mathbb{R}^2$ (dominio).

Proposición

El pullback de un producto cuña es el producto cuña de los pull-backs

$$f^*(\alpha\wedge\beta) = f^*\alpha\wedge f^*\beta$$

"El saltapatrás de las cuñas es la cuña de los saltapatrases"

Ejemplo

$$f: \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(\theta_1,\theta_2) \longmapsto (e^{\theta_1}\cos\theta_2, e^{\theta_1}\sin\theta_2) = (\phi,\psi)$$

$$\alpha = d\phi\wedge d\psi$$

$$f^*\alpha = d(e^{\theta_1}\cos\theta_2)\wedge d(e^{\theta_1}\sin\theta_2)$$

$$= (e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_1 - e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_2)\wedge(e^{\theta_1}\sin\theta_2\,d\theta_1 + e^{\theta_1}\cos\theta_2\,d\theta_2)$$

$$= e^{2\theta_1}\cos^2\theta_1\,d\theta_1\wedge d\theta_2 - e^{2\theta_1}\operatorname{sen}^2\theta_1\,d\theta_2\wedge d\theta_1$$

$$(d\theta_1\wedge d\theta_2 = -d\theta_2\wedge d\theta_1)$$

$$= e^{2\theta_1}\,d\theta_1\wedge d\theta_2$$