Funciones diferenciables

Una función $F : \mathcal{M} \to \mathbb{R}^n$ se llama diferenciable si para todo punto $p \in \mathcal{M}$ existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ tal que la representacion local

$$F \circ \varphi : x \longrightarrow F \circ \varphi(x)$$

es una funcion de $\mathbb{R}^n$, es diferenciable.

Gracias a $\varphi_1^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1) \to \varphi_1^{-1}(\mathcal{U} \cap \mathcal{U}_1)$, esto es válido para $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ en p en la intersección.

- La regla de la cadena

$$F \circ \varphi_1 = (F \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi_1)$$

Más general, $F : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$ entre dos variedades es diferenciable si para cada p existe una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ en $\mathcal{M}$ y una $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ en $F(p)$ con $F(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}_1$ tal que la representación

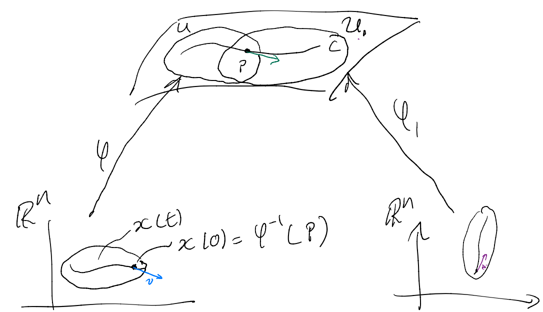
$$\varphi_1^{-1} \circ F \circ \varphi : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_1^{-1}(\mathcal{U}_1) \subset \mathbb{R}^m$$

que es un mapeo entre espacios euclidianos, es diferenciable.

Espacio tangente

Sea $p \in \mathcal{M}$. Consideramos $c : \mathbb{R} \to \mathcal{M}$ que pasa por p con $c(0) = p$. En una carta $(\mathcal{U}, \varphi)$ sobre p, la curva representada por $\varphi^{-1} \circ c : t \to \varphi^{-1} \circ c(t) = x(t)$ (curva en $\mathbb{R}^n$) tiene un vector tangente en $x(0) = \varphi^{-1}(p)$ dado por

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1} \circ c)(0) = v \in \mathbb{R}^n$$



En otras coordenadas, $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1^{-1} \circ c)(0) = v_1 \in \mathbb{R}^n.$$

Como $\varphi_1^{-1} \circ c = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ c)$, los dos vectores $v, v_1 \in \mathbb{R}^n$ están relacionados por el isomorfismo lineal,

$$v_1 = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)'(x)\, v \quad , \; x = x(0) = \varphi^{-1}(p) \quad (\text{Iso})$$

$v, v_1 \in \mathbb{R}^n$ representaciones del vector tangente en p.
Definimos el vector tangente en $p \in \mathcal{M}$ por la clase de equivalencia de todas las representaciones.

La colección de todos los vectores tangentes se denota por $T_p\mathcal{M}$.

La derivada de un mapeo entre espacios euclidianos se puede extender a variedades.

$f : \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^m$ es un mapeo diferenciable entre variedades. Definimos el mapeo tangente en un punto $p \in \mathcal{M}$, denotado por

$$df(p) : T_p\mathcal{M} \longrightarrow T_{f(p)}\mathcal{N}$$

como el mapeo lineal que en coordenadas de $(\mathcal{U}, \varphi)$ de p y $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ en $f(p)$ ${}_{t}\mathcal{N}$ se representa por el mapeo lineal,

$$v \longmapsto (\varphi_1^{-1} \circ f \circ \varphi)'(x)v, \quad x = \varphi^{-1}(p)$$

de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$, donde $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es la representación local de f.

Un campo vectorial X en una variedad asocia a cada punto $p \in \mathcal{M}$ un vector tangente $X(p) \in T_p\mathcal{M}$.

En coordenadas locales, $(\mathcal{U}, \varphi)$ sobre p se representa por una función vectorial $f(x) \in \mathbb{R}^n$, $x = \varphi^{-1}(p)$,

$$f : \varphi^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Si $(\mathcal{U}_1, \varphi_1)$ son coordenadas en p, el vector $X(p)$ se representa por $g(y) \in \mathbb{R}^n$ $y = \varphi_1^{-1}(p)$ y por (Iso),

$$v_1 = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)'(x)v, \quad x = \varphi^{-1}(p)$$

$f(x)$ y $g(y)$ están relacionadas por

$$g(y) = (\varphi_1^{-1} \circ \varphi)'(x) f(x), \quad y = \varphi_1^{-1} \circ \varphi(x)$$

Esta es la ley de tranformación de campos vectoriales de cálculo.

$$y = u(x) = \varphi_1^{-1} \circ \varphi(x)$$

$$g(y) = u' \cdot f \circ u^{-1}(y) \quad \text{y} \quad f(x) = (u')^{-1} \cdot g \circ u(x)$$

(Comp)

Recíprocamente, si tenemos campos vectoriales escritos en coordenadas locales, estos definen un campo vectorial en M si satisfacen las condiciones de compatibilidad (Comp) para los correspondientes mapeos de transición.

De forma alternativa, podemos definir un campo vectorial X

$$\sum_{j=1}^{n} f_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{donde } f = (f_1, \dots, f_n)$$

es la función vectorial de antes.

Consideramos cualquier curva $t \mapsto \varphi^{-1} \circ c(t) = x(t)$,

La curva pasa por $x(0) = x$ y tiene el vector tangente

$$\frac{d}{dt} (\varphi^{-1} \circ c)(0) = f(x) \in \mathbb{R}^n$$

Si luego F es una función de $\mathbb{R}^n$ tenemos que,

$$\frac{d}{dt} F(\varphi^{-1} \circ c(t)) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \frac{\partial F(x)}{\partial x_j}$$

es decir, esta es la derivación de F en la dirección del campo vectorial f en x.

Si tenemos difeomorfismos $F: M \to M_1$ entre 2 variedades de la misma dimensión, esto da lugar a una transformación de campos vectoriales que va hacia atrás de TM_1 hacia TM y se llama un "pull back". Esta mapea un campo vectorial Y en M_1, en un campo vectorial $X = F^*(Y)$ en M definido por

$$F^*(Y)(P) = d(F^{-1})\, Y \circ F(P) \qquad \text{(PB)}.$$