Formas diferenciales

Transformaciones multilineales

Sea E un espacio vectorial real con base $e_1, \dots, e_n$ y E^* su dual con $e^1, \dots, e^n$.

$$(e^i(e_j) = \delta_{ij})$$

Sea

$$B : E \times E \to \mathbb{R}$$

B es bilineal si y sólo si es $\mathbb{R}$-lineal en cada uno de sus argumentos.

Si $\alpha, \beta \in E^*$ entonces

$$\alpha \otimes \beta : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto \alpha(v) \cdot \beta(w)$$

es bilineal.

Denotamos por $E^* \otimes E^*$ el espacio de todas transformaciones bilineales $E \times E \to \mathbb{R}$

La transformación bilineales están únicamente determinadas por $B(e_i, e_j)$ elementos de la base.

La dim $E^* \otimes E^* = n^2$

Una base de $E^* \otimes E^*$ es $\{e^i \otimes e^j\}$

$$e^i \otimes e^j : E \times E \to \mathbb{R}$$
$$(v, w) \mapsto e^i(v) \cdot e^j(w)$$

Todas las transformaciones bilineales se escriben

$$B = \sum \lambda_{ij} \, e^i \otimes e^j$$

De manera similar

$$\mathcal{T}^k(E) = \underbrace{E^* \otimes E^* \otimes \cdots \otimes E^*}_{k\text{-veces.}}$$

es el espacio de todas las transformaciones multilineale de $\underbrace{E \times E \times \cdots \times E}_{k} \to \mathbb{R}$

espacio vectorial de dimensión n^k

y $\{ e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots i_k \leq n \}$ es una base.

Si $T \in \mathcal{T}^k(E)$ y $S \in \mathcal{T}^s(E)$ entonces su producto tensorial se define con el elemento $T \otimes S \in \mathcal{T}^{k+s}(E)$

$$T \otimes S(v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+s})$$
$$= T(v_1, v_2, \dots, v_k) \cdot S(v_{k+1}, \dots, v_{k+s})$$

Se dice que $T \in \mathcal{T}^k(E)$ es asimétrica ó alternada

$$T(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sig}(\sigma)\, T(v_1, \dots, v_k)$$

Denotamos por $\Lambda^k(E)$ el espacio de las transformaciones k-multilineales y alternadas.

Si $T \in \mathcal{Z}^k(E)$ entonces $A(T)$ definido por

$$A(T)(v_1, \dots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \Sigma_k} \mathrm{sig}(\sigma)\, T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})$$

es antisimétrico y $A(T) = T$ si $T \in \Lambda^k(E)$.

Def (producto exterior)

Dados $T \in \Lambda^k(E)$ y $S \in \Lambda^l(E)$ su producto exterior (producto cuña)

$T \wedge S \in \Lambda^{k+l}(E)$ se define como

$$T \wedge S = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} A(T \otimes S)$$

Propiedades

a) Es bilineal

b) $T \wedge S = (-1)^{k \cdot l} S \wedge T$

c) $(T \wedge S) \wedge R = T \wedge (S \wedge R)$

d) Si $\alpha^1, \dots, \alpha^m \in E^*$ entones

$$\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \dots \wedge \alpha^m (v_1, v_2, \dots, v_m) = \sum_{\sigma \in \Sigma_m} \mathrm{sig}(\sigma)\, \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdot \alpha^2(v_{\sigma(2)}) \cdot \dots \cdot \alpha^m(v_{\sigma(m)})$$

Ejemplo

$$\alpha \wedge \beta (v, w) = \alpha(v) \cdot \beta(w) - \alpha(w) \beta(v)$$

Hacia variedades simplécticas.

→ Variedad.

Una variedas es un espacio topológico de Hausdorff M que se ve localmente como el espacio euclidiano.

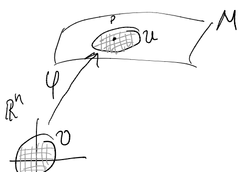
- para cada punto $p \in M$ hay una vecindad que se describe por coordenadas de $\mathbb{R}^n$.

Hay un homeomorfismo φ de un abierto V de $\mathbb{R}^n$ sobre $U \subset M$

$$\varphi : V \in \mathbb{R}^n \longrightarrow U \subset M$$

Los puntos $p = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ en U están en correspondencia 1 a 1 con los puntos $x = (x_1, \dots, x_n)$ en el abierto $V \in \mathbb{R}^n$.

La pareja (U, φ) se llama carta y los puntos $x \in V$ son las coordenadas correspondientes.

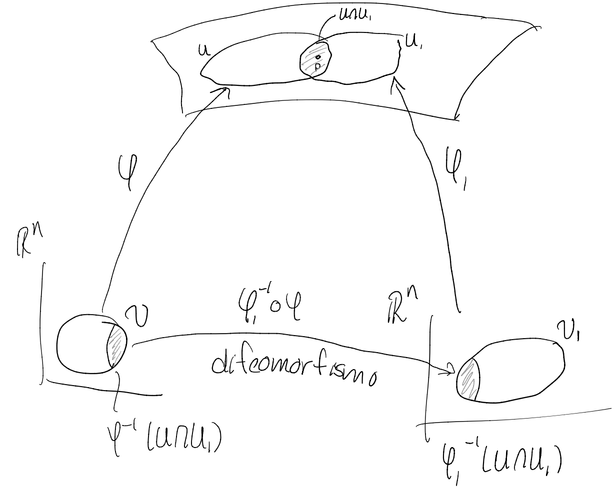


Las cartas que se traslapan se juntan de la siguiente manera.

Si (U_1, φ_1) es otra carta en el punto p tal que $U_1 \cap U \neq \phi$ entonce requerimos que el mapeo

$$\varphi_1^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(U \cap U_1) \longrightarrow \varphi_1^{-1}(U \cap U_1)$$

sea un difeomorfismo.



En otras palabras el mapeo $y = u(x) = \varphi_1^{-1} \circ \varphi(x)$ que es 1-1 entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ es diferenciable y su inversa también es.

El espacio M junto con la colección de cartas cubrientes de M y la condición de compatibilidad se llama variedad diferenciable de dimensión n.

$$(M^n, \mathcal{M}^n).$$