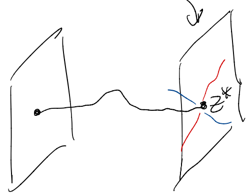
Variedades invariantes de puntos fijos de difeomorfismos

$F(z)$

pto fijo $F(z^*) = z^*$



Sea $\mathcal{A} = \mathbb{R}^n$ el espacio ambiente

$\Theta = \mathbb{R}^d$ la varedad modelo con $d \leq n$

$\mathbb{R}^n$ $\quad z = (z_1, \dots, z_n)$

$\quad s = (s_1, \dots, s_d)$

$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ difeomorfismo

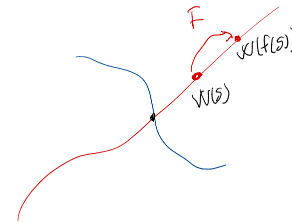
$z_* \in \mathbb{R}^n$, pto fijo $F(z_*) = z_*$

- Buscamos una variedad d-dimensional $\mathcal{W}$ inmersa por una parametrización $W : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ tal que $W(0) = z_*$
- La dinámica
  $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$

Ecuación de invarianza

$$F(W(s)) = W(f(s))$$

└ otro punto sobre la variedad basado en $f(s)$



incognitas W, f (vamos a expandir en Taylor)

$$DF(z_*)\, DW(0) - DW(0)\, Df(0) = 0 \qquad (1.8)$$

- $L = DW(0) \in \mathbb{R}^{n \times d}$ vector columna.
  - expande el espacio tangente a $\mathcal{W}$ en z_*, $V^L \in T_{z_*}\mathcal{W}$

(1.8) representa la invarianca V^L bajo $DF(Z_*)$ y $\Lambda_L = Df(0)$ es la representación del mapeo lineal $DF(Z_*)$ restringido a V^L

$$DF(Z_*)L = L\Lambda_L$$

Taylor de W y f. $\sum W_k s^k$

$$W(s) = Z_* + \sum_{k\geq 1} W_k(s)$$

$$f(s) = \sum_{k\geq 1} f_k(s)$$

donde W_k (y f_k) es un n-vector (ó d-vector) de polinomios homogéneos d-variantes de orden k.

De $DF(Z_*)L = L\Lambda_L$ tenemos que el primer orden de la serie es $W_1(s) = Ls$ y $f_1(s) = \Lambda_L s$.

El primer paso

- adaptar un sistema de coords. lineal a una base de $\mathbb{R}^n$ donde las primeras d vectores columnas son $L \in \mathbb{R}^{n\times d}$ y las últimas $n-d$ son una matriz $N \in \mathbb{R}^{n\times(n-d)}$

Sea

$$P = (L \vdots N)$$ yuxtaposición de L y N.

P es invertible.

- el marco adaptado.

☆ El espacio normal V^N no es invariante bajo $DF(Z_*)$

Ponemos las series en la ec. de invarianza.

$$F(W(s)) - W(f(s)) = 0$$

y juntamos los términos a orden k.

- Llegamos a la sig. ecuación (Ecuación cohomológica)

$$DF(z_*)W_k(s) - W_k(\Lambda_L s) - Lf_k(s) - E_k(s) = 0$$

donde

$$E_k(s) = [F(W_{<k}(s))]_k - [W_{<k}(f_{<k}(s))]_k$$

es el error a orden k.

- Resolver las ecuaciones cohomológicas consite en calcular los coeficientes de los polinomios homogéneos.

$$W_k^i(s) = \sum_{|m|=k} W_m^i s^m \quad (i=1,\dots,n)$$

$$f_k^j(s) = \sum_{|m|=k} f_m^j s^m, \quad (j=1,\dots,d)$$

y $$E_k^i(s) = \sum_{|m|=k} E_m^i s^m \quad (i=1,\dots,n)$$

- i,j componentes de los vectores.
- $s = (s_1,\dots,s_d)$ y $m = (m_1,\dots,m_d) \in \mathbb{N}^d$
- $|m| = m_1 + \dots + m_d$, $s^m = s_1^{m_1} s_2^{m_2} \dots s_d^{m_d}$.

Hacemos un cambio de variables utilizando el marco adaptado, la corrección a orden k $\xi_k(s) = P^{-1} W_k(s)$

$$\Lambda \xi_k(s) - \xi_k(\Lambda_L s) - \begin{pmatrix} Id \\ 0 \end{pmatrix} f_k(s) = \eta_k(s), \quad (1.10)$$

donde $\eta_k(s) = -P^{-1}E_k(s)$.

La variedad parametrizada es $W(s) = z_* + P\xi(s)$

La ecuación para la corrección normal es

$$\Lambda_N \xi_k^N(s) - \xi_k^N(\Lambda_L s) = \eta_k^N(s)$$

$\eta_k^N = (0 \; Id_{n-d})\eta_k$, $\xi_k^N = (0, Id_{n-d})\xi_k$

Direcciones tangentes,

Viene del hecho de que V^N no son invariantes.

$$\Lambda \xi_k^L(s) - \xi_k^L(\Lambda_L s) - f_k(s) = \eta^L(s) - T\xi_k^N(s) \quad (1.12)$$

Λ_L eigenvalores tangentes.

Λ_N eigenvalores normales.

$$\Lambda_L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$$

$$\Lambda_N = \operatorname{diag}(\lambda_{d+1}, \dots, \lambda_n)$$

Así $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con columnas reales correspondientes a eigenvectores reales. ∃ columnas imaginarias provenientes de pares complejos conjugados.

Ecuaciones cohomológicas normales.

La ecuación cohomológica Normal para $i = d+1, \dots, n$:

$$\lambda_i \xi_K^i(s) - \xi_K^i(\Lambda_L s) = \eta_K^i(s)$$

Notemos que estas ecuaciones son diagonales en los coeficientes ξ_m^i de $\xi_K^i(s)$.

En particular, para $i = d+1, \dots, n$ $|m| = k$:

$$(\lambda_i - \lambda_L^m)\, \xi_m^i = \eta_m^i$$

$$\lambda_L^m = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_d^{m_d}.$$

Los pares tales que $\lambda_i = \lambda_L^m$

Estas son las resonancias cruzadas

Si no las hay,

$$\xi_m^i = \frac{\eta_m^i}{\lambda_i - \lambda_L^m}.$$

Ecuación tangente

Se escribe $i = 1, \dots, d$.

$$\lambda_i \xi_K^i(s) - \xi_K^i(\Lambda_L(s)) - f_K^i(s) = \tilde{\eta}_K^i(s)$$

donde $\tilde{\eta}_K^L(s) = \eta_K^L(s) - T\xi_K^N(s)$

Las ecuaciones para ξ_m^i nos quedan

$$(\lambda_i - \lambda_L^m)\, \xi_m^i - f_m^i = \tilde{\eta}_m^i .$$

$\lambda_i = \lambda_L^m$ son resonancias internas.

Si no las hay $i = 1, \dots, d$.

$$\xi_m^i = \frac{\tilde{\eta}_m + f_m^i}{(\lambda_i - \lambda_L^m)} .$$