De aquí es claro que $E^\perp$ es un subespacio lineal y como $v \perp w \Rightarrow w \perp v$. Esto implica que $(E^\perp)^\perp \supset E$

Como $[\cdot,\cdot]$ es no degenerada, tenemos que $\dim E + \dim E^\perp = \dim V$

y así $(E^\perp)^\perp = E$

El concepto de ortogonalidad en GS es distinto al de geometría euclidiana.

- todo vector es ortogonal a sí mismo

$$[v,v] = -[v,v] = 0$$

- Si $\dim E = 1$, entonces $E \subset E^\perp$

Restringimos la forma bilineal $[\cdot,\cdot]$ a subespacios lineales.

- La forma siempre es antisimétrica
- ¿Cuando es no degenerada?
  - Esto sólo ocurre cuando $E$ y $E^\perp$ son complementarios.

$$E \cap E^\perp = \{0\}$$

  - De hecho, $[\cdot,\cdot]$ restricción a $E$ es no degenerada si $v \in E$

$$[v,w] = 0 \quad \forall\, w \in E \Rightarrow v = 0$$

si $v \in E \cap E^\perp \Rightarrow v = 0$

El converso es análogo.

- Entonces cuando $E \cap E^\perp = \{0\}$ llamamos a $E$ un <u>subespacio simpléctico</u>.
- Por simetría, tenemos que $E$ es simpléctico si y sólo si $E^\perp$ es simpléctico.

<u>Lema</u>

Sea $V$ un espacio simpléctico.

1) $\dim V$ es par, digamos $2n$
2) Existe una base $v_1, v_2, \ldots, v_{2n}$ que satisface

$$[v_j, v_{k+n}] = \delta_{jk} \quad \text{para } 1 \leq j < k+n \leq 2n$$

A esta base, la llamamos <u>base canónica</u>.

Ilustramos los conceptos con la forma bilineal.

$x, x' \in V$, $x = (q, p)$ y $x' = (q', p')$.

$$[x, x'] = \langle x, Jx' \rangle = \langle p, q' \rangle - \langle q, p' \rangle$$

$$x = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

El subespacio

$$\{x : q_1 = q_2 = \dots = q_r = 0\}$$

es coisotrópico para $r \leq n$.

Por cierto si $r = n$, el subespacio es Lagrangiano.

El subespacio

$$\{x : q_1 = p_1 = 0, \dots, q_r = p_r = 0\}$$

es simplectico.

El subespacio.

$$\{x : q_1 = \dots = q_n = 0, p_1 = \dots = p_r = 0\}$$

es isotrópico.

# Formas diferenciales

Una forma de grado 1 (1-forma) es una función lineal $\omega : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

$$\omega(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 \omega(v_1) + \lambda_2 \omega(v_2)$$

$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$

El conjunto de todas las 1-formas es un espacio vectorial real.

$$(\omega_1 + \omega_2) v = \omega_1(v) + \omega_2(v)$$

$$(\lambda \omega) v = \lambda \omega(v)$$

El espacio de las 1-formas de $\mathbb{R}^m$ es un espacio vectorial $m$-dimensional y se llama espacio dual de $(\mathbb{R}^m)$ denotado $(\mathbb{R}^m)^*$.

Sea $E$ un espacio vectorial de dim finita, con base $e_1, \dots, e_m$

$$E^* = \{\omega : E \to \mathbb{R} \text{ lineales}\}$$

con base $e^1, \dots, e^m$

$$\to e^i(e_j) = \delta_{ij}$$

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e^i \quad \text{donde } \lambda_i = \omega(e_i)$$