Para hacer el cálculo necesitamos que $\int_0^1 S^n(\theta)\,d\theta = 0.$

Esto lo sabía Poincaré.

Denotemos

$$l_\varepsilon^{[<n]}(\theta) = \sum_{i=1}^{n-1} l^i(\theta)\,\varepsilon^i \quad \left(\sim O(\varepsilon^{n-1})\right)$$

por la definición

$$\left(L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right) + \varepsilon V'\left(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right)$$

$$= \varepsilon^n S^n(\theta) + O(\varepsilon^{n+1})$$

Multiplicamos la expresión por

$$\left[1 + l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\right] = \frac{d}{d\sigma}\left[\theta + \sigma + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta+\sigma)\right]\Big|_{\sigma=0}$$

$$0 = \int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\,d\theta + \int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta$$

$$+ \varepsilon \int_0^1 V'\left(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right)\left[1 + l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\right] d\theta$$

$$- \varepsilon^n \int_0^1 S^n(\theta)\,d\theta - \varepsilon^n \int_0^1 S^n(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta$$

↳ esta es de orden ε^{n+1}!

$$+ O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\int_0^1 V'\left(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right)\left[1 + l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\right] d\theta = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} V\left(\theta + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right) d\theta$$

$$= 0$$

$$\int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\,d\theta = \int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta+\omega) + l_\varepsilon^{[<n]}(\theta-\omega) - 2 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\,d\theta = 0$$

$$\int_0^1 f(\theta)\,d\theta = \int_0^1 f(\theta+\omega)\,d\theta = \int_0^1 f(\theta-\omega)\,d\theta$$

$$\int_0^1 \left[L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right] l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta = \int_0^1 l^{[<n]}(\theta+\omega)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) + l^{[<n]}(\theta-\omega)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta) - 2 l^{[<n]}(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta = 0$$

$$\int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\right)^2 d\theta = 0$$

$$\int_0^1 l^{[<n]}(\theta+\omega)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta = -\int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta+\omega)\, l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\,d\theta$$

$$= -\int_0^1 l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]}(\theta-\omega)\,d\theta$$

Obtenemos que

$$\int_0^1 L_\omega l_\varepsilon^{[<n]}(\theta)\, l_\varepsilon^{[<n]'}(\theta)\,d\theta = 0$$

A orden ε^n nos quedó

$$0 = \int_0^1 S^n(\theta)\,d\theta\, \varepsilon^n + O(\varepsilon^{n+1})$$

$$\int_0^1 S^n(\theta)\,d\theta = 0. \quad //$$

Podemos resolver formalmente

$$L_\omega l^n(\theta) = S^n(\theta)$$

Acabamos de demostrar que

Teorema Las series de Lindstedt existen a todos los órdenes.

Otra cosa es demostrar que la serie

$$l_\varepsilon(\theta) = \sum_{i=1}^{\infty} l^i(\theta)\,\varepsilon^i$$ converge a una función.

Hay implementaciones numéricas que podemos estudiar más adelante.

R. de la Llave, C. Falcolini, 1992.

A. Bustamante, R.C., 2019, 2021

Geometría simpléctica

Una transformación canónica es una transformación lineal de la forma.

$x = Uy$ donde U es una matriz de $2n \times 2n$

$$U^T J U = J \quad \text{con} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Estas matrices se llaman simplécticas.

Introducimos una forma bilineal. $v, w \in \mathbb{R}^{2n}$

$$[v, w] = \langle v, Jw \rangle$$

(i) antisimétrica.

$$[v, w] = -[w, v]$$

(ii) no-degenerada.

$$[v, w] = 0 \quad \forall\, w \in \mathbb{R}^{2n} \Rightarrow v = 0$$

(se sigue de que $\det(J) \neq 0$)

Notamos que $U^T J U = J$ es equivalente a que $[v, w]$ conserva el mapeo

$y \mapsto x = Uy$

$v' = Uv$, $w' = Uw$ entonces

$$[v', w'] = [Uv, Uw] = \langle v, U^T J U w \rangle$$
$$= \langle v, Jw \rangle = [v, w]$$

- De los cursos de mecánica, los mapeos simplécticos forman un grupo $Sp(\mathbb{R}, 2n)$.
- Más aún, de la expresión $U^T J U = J$
  $\Rightarrow (\det U)^2 = 1$
- $J^2 = -Id \Rightarrow J$ es matriz simpléctica.

En la geometría euclidiana tenemos que las transformaciones $x \to Ux$ con

$$U^T U = Id$$

preservan el producto interno.

Geometría Euclidiana	Geometría Simpléctica
$\langle v, w \rangle$ $x = Uy$	$\langle v, Jw \rangle$ $x = Uy$
$U^T U = Id$	$U^T J U = J$

Introdujimos la forma bilineal

$$[v, w] = \langle v, Jw \rangle$$

pero aceptamos cualquier forma bilineal que sea

(i) antisimétrica

(ii) no degenerada.

en un espacio vectorial real y finito dimensional, V.

Llamamos a V equipado con una forma bilineal $[\circ, \circ]$, un espacio vectorial simpléctico.

Decimos que $v \perp w$ "v es ortogonal a w c.r.a la forma simpléctica, $[\circ, \circ]$", si $[v, w] = 0$.

Si E es un subespacio lineal de V, definimos

$$E^{\perp} = \{ w \in V : [v, w] = 0, \ \forall v \in E \}$$

De aquí es claro que $E^\perp$ es un subespacio lineal y como $v \perp w \Rightarrow w \perp v$. Esto implica que $(E^\perp)^\perp \supset E$

Como $[\cdot,\cdot]$ es no degenerada, tenemos que $\dim E + \dim E^\perp = \dim V$

y así $(E^\perp)^\perp = E$

El concepto de ortogonalidad en G S es distinto al de geometría euclidiana.

- todo vector es ortogonal a sí mismo

  $[v,v] = -[v,v] = 0$

- Si $\dim E = 1$, entonces $E \subset E^\perp$