En términos de la función periódica l_ε, tenemos,

$$K_\varepsilon(\theta+\sigma) = \begin{pmatrix} \theta+\sigma + l_\varepsilon(\theta+\sigma) \\ u(\theta+\sigma) \end{pmatrix}$$

Si $l_\varepsilon(\theta)$ es solución, entonces

$\sigma + l_\varepsilon(\theta+\sigma)$ también es una solución.

σ está relacionada con el promedio.

Imponemos que $\int_0^1 l_\varepsilon(\theta)\,d\theta = 0$.

Investigamos la existencia de soluciones como una serie de potencias formal,

$$l_\varepsilon(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n(\theta)\varepsilon^n$$

funciones periódicas.

$l^n : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

A orden cero, tenemos

$$L_\omega l^0(\theta) = l^0(\theta+\omega) + l^0(\theta-\omega) - 2l^0(\theta) = 0$$

L_ω es un operador lineal, que aparece mucho en teoría KAM.

$\mathbb{T}^1 = [0,1] = S^1$

$e^{2\pi i k\theta} : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{C}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} L_\omega e^{2\pi i k\theta} &= e^{2\pi i k(\theta+\omega)} + e^{2\pi i k(\theta-\omega)} - 2e^{2\pi i k\theta} \\ &= \left(e^{2\pi i k\omega} + e^{-2\pi i k\omega} - 2\right) e^{2\pi i k\theta} \\ &= \left(2\cos(2\pi k\omega) - 2\right) e^{2\pi i k\theta} \\ &= 2(\cos(2\pi k\omega) - 1)\, e^{2\pi i k\theta} \end{aligned}$$

Así si $\eta(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\theta}$, entonces podemos resolver la ecuación

$$L_\omega \varphi(\theta) = \eta(\theta), \quad \varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\theta}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty} 2(\cos(2\pi k\omega)-1)\,\hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}^{\infty} \hat{\eta}_k e^{2\pi i k\theta}$$

Para cada k

$$\hat{\varphi}_k = \frac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k\omega)-1)}$$

Si $k=0$

$$2(\cos(2\pi k\omega)-1)=0$$

$$0\cdot\hat{\varphi}_0=\hat{\eta}_0,$$ Vamos a asumir que $$\int_0^1 \eta(\theta)\,d\theta = 0 = \hat{\eta}_0$$

Escogemos $\hat{\varphi}_0=0$, $\int_0^1 \varphi(\theta)\,d\theta=0$.

$$\hat{\varphi}_k = \frac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k\omega)-1)}, \quad k\neq 0$$

Si $\omega\in\mathbb{Q}$, $\omega = l/m$ $\quad n\in\mathbb{Z}$

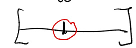
$$\cos(2\pi k\, l/m) = 1 \quad \text{si } k=m\cdot n$$

Suponemos que $\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (irracional).

$$\varphi(\theta)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\hat{\varphi}_k e^{2\pi i k\theta} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\hat{\eta}_k}{2(\cos(2\pi k\omega)-1)} e^{2\pi i k\theta}$$

Nos preocupa $\cos(2\pi k\omega)\approx 1$. Esto pasa cuando $k\omega\approx n$ y a su vez esto ocurre cuando $\omega\approx \frac{n}{k}$. Por esta razón nos interesa hablar de irracionales que sean difíciles de aproximar por racionales.

$\omega\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$



Nos gustaría que $2(\cos(2\pi k\omega)-1)$ se fuera a cero más lento que $\hat{\eta}_k$. $\rightsquigarrow$ $k\omega$ se acercará a un entero sólo cuando k es grande.

$\omega\approx \frac{n}{k}$ Después cuantificaremos.

$$l_\varepsilon(\theta+\omega)+l_\varepsilon(\theta-\omega)-2l_\varepsilon(\theta) = -\varepsilon V'(\theta+l_\varepsilon(\theta)) \quad \left(=\sum_{n=1}^{\infty} S^n(\theta)\varepsilon^n\right)$$

ε^0

$$L_\omega l^0(\theta)=0, \quad \int_0^1 l_\varepsilon(\theta)\,d\theta=0, \quad \int_0^1 l^0(\theta)\,d\theta=0$$

Soln. $l^0(\theta)=$ constante $=0$

ε^1

$$L_\omega l^1(\theta) = -V'(\theta) = S^1(\theta)$$

$l^1(\theta)$

ε^2

$$L_\omega l^2(\theta) = -V''(\theta)\, l^1(\theta)$$

$l^2(\theta)$ con $\int_0^1 l^2(\theta)\,d\theta=0$

En general ε^n, tenemos que

$$L_\omega l^n(\theta) = S_n(\theta),$$

Lo que sabemos es que S_n es una expresión que involucra derivadas de V y las l's calculadas anteriormente.

Para hacer el cálculo necesitamos que $\int_0^1 S_n(\theta)\,d\theta = 0$.

Esto lo sabía Poincaré.

Demostremos esto la clase próxima...