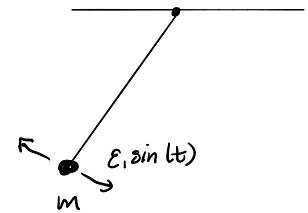
Evaluación del curso.

1) Tareas a lo largo del semestre.

2) Proyecto al final del curso.

Péndulo forzado

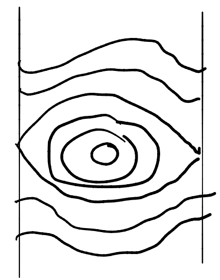
$$\dot{q} = p$$
$$\dot{p} = \sin(q) + \varepsilon_1 \sin(t)$$



Sistema Hamiltoniano

$$H(q, p, t) = \frac{1}{2} p^2 - \cos(q) - \varepsilon_1 \sin(t)\, q$$

$\varepsilon_1 = 0$ péndulo usual integrable.



1 grado de libertad.

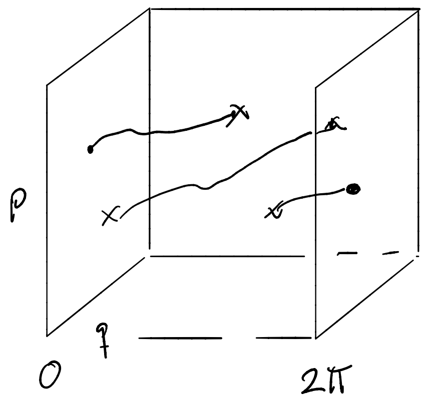
Espacio fase

$\mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$

(q, p)

$\varepsilon_1 > 0$

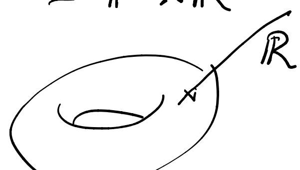
$\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial t} \neq 0$ $\quad 1+\frac{1}{2}$ grados de libertad.



$\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}\times\mathbb{T}^1$

(q,p,t)

$\simeq \mathbb{T}^2\times\mathbb{R}$



Sección de Poincaré.

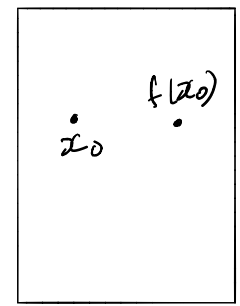
Mapeo estroboscópico.

Se toma en cuenta los tiempos $t = 0, 2\pi, \dots, 2\pi n$

$n \in \mathbb{Z}$

En la sección de Poincaré estamos considerando una función que lleva una condición inicial en $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}$ al $\mathbb{T}^1\times\mathbb{R}$

$x_0 = (q,p) \in \mathbb{T}^1\times\mathbb{R}$



En la sección queremos estudiar funciones al tiempo $t = 2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

El flujo de un sistema Hamiltoniano.

Sea $\varphi^t(x_0)$ flujo al tiempo t de $\dot{z} = J\nabla_z H(z,t)$ es un simplectomorfismo.

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}(q,p,t) \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p,t) \qquad \dot{z} = J\nabla_z H(z,t)$$

$$\dot{t} = 1 \qquad \dot{t} = 1$$

$$f: \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}^1 \times \mathbb{R}$$

$$z = (q,p) \longmapsto f(z) = \varphi^{2\pi}(q,p)$$

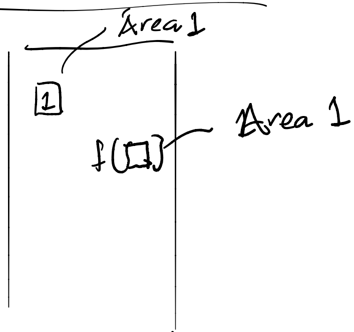
En el caso del cilindro simpléctico quiere decir que f preserva áreas.

$Df(z)$ es una matriz simpléctica

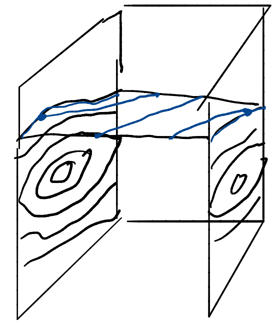
$$Df(z)^T J \, Df(z) = J$$

$$\det(Df(z)) = 1$$

f preserva área.



$\varepsilon_1 = 0$



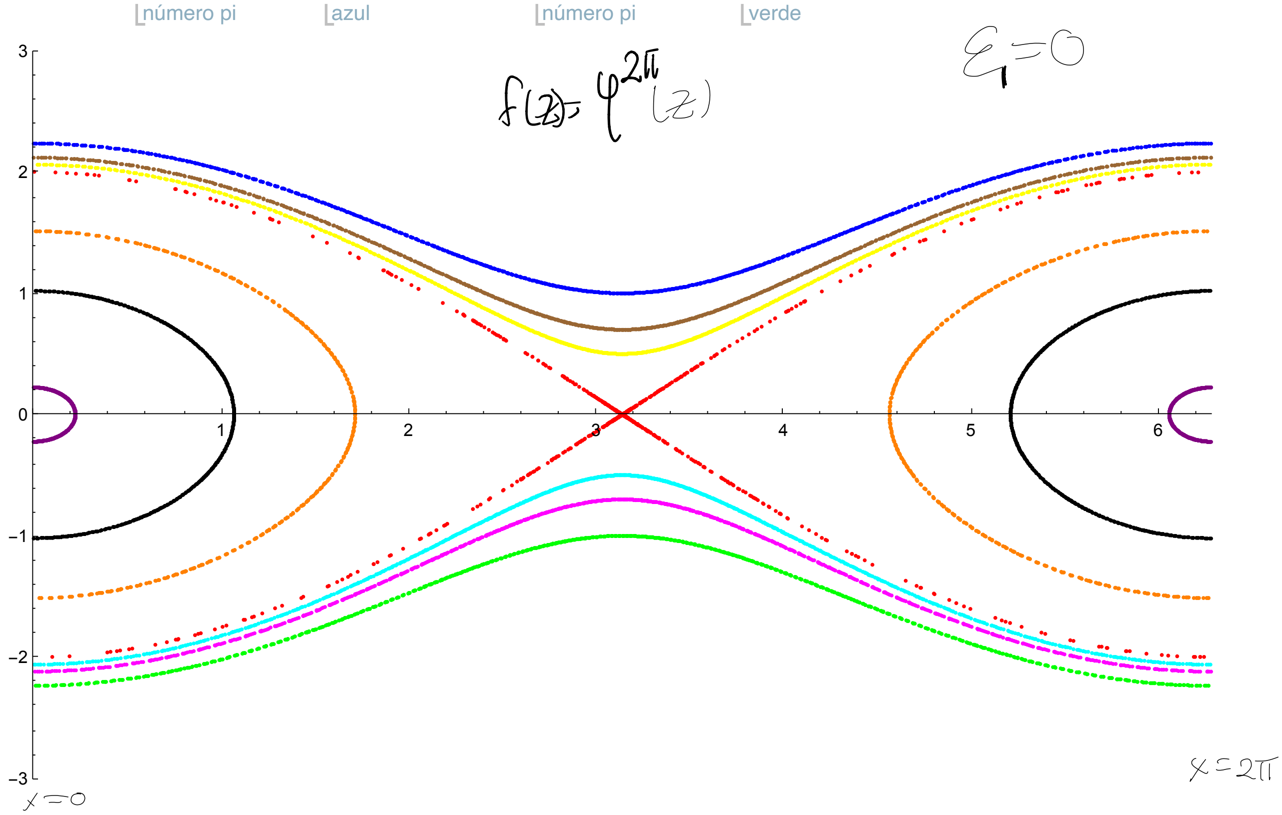
Para este caso la ec. dif. es integrable.

4. Hacer el digrama de fases (graficar algunas órbitas con colores distintos) del mapeo de Poincaré para ϵ_1=0,0.05,0.1.

ϵ=0

In[18]:=
```
Show[orb[0, {0.2, 0.1}, 1000, Purple], orb[0, {0.2, 1}, 1000, Black],
  orb[0, {0.2, 1.5}, 1000, Orange], orb[0, {Pi, 0.0001}, 1000, Red],
  orb[0, {Pi, 0.5}, 1000, Yellow], orb[0, {Pi, -0.5}, 1000, Cyan],
  orb[0, {Pi, 0.7}, 1000, Brown], orb[0, {Pi, -0.7}, 1000, Magenta],
  orb[0, {Pi, 1}, 1000, Blue], orb[0, {Pi, -1}, 1000, Green]]
```
muestra, púrpura, negro, naranja, número pi, rojo, número pi, amarillo, número pi, cian, número pi, marrón, número pi, magenta, número pi, azul, número pi, verde

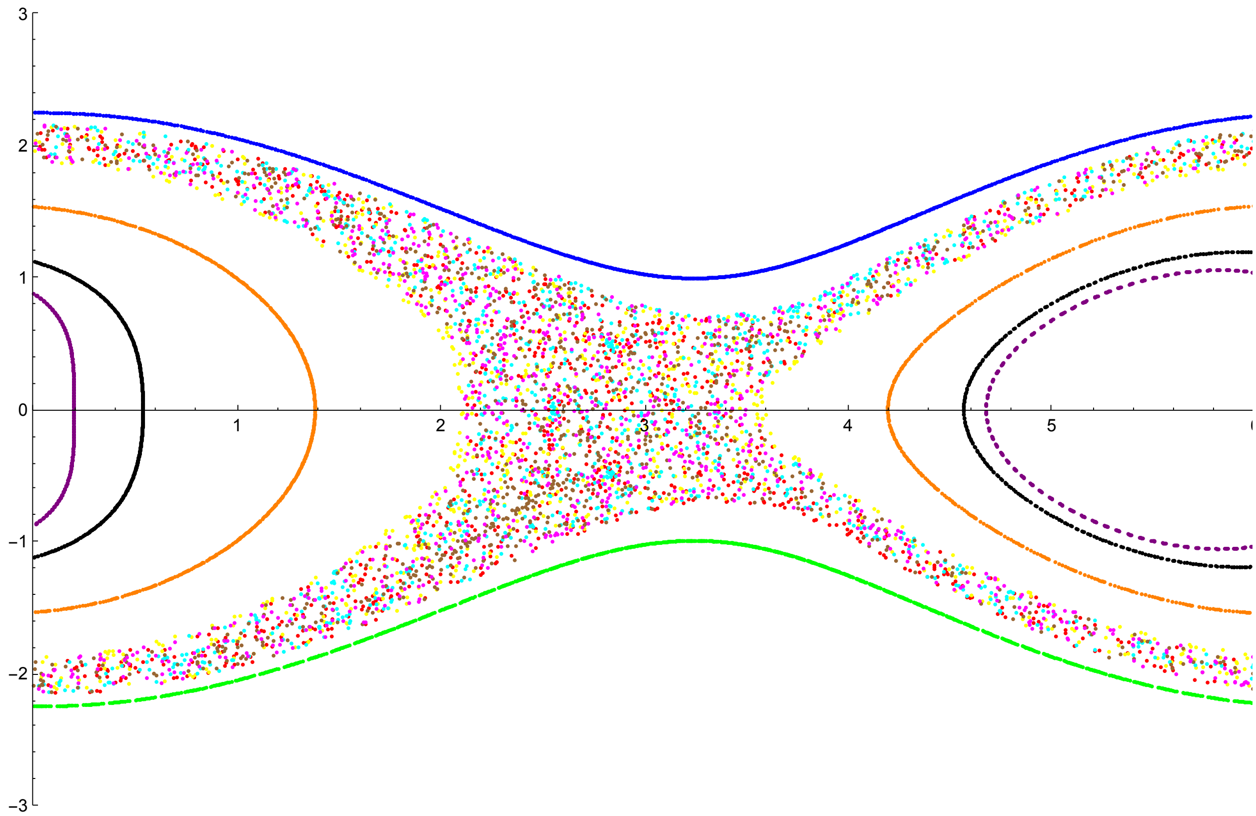
Out[18]=



ϵ=0.1

In[∘]:=
```
Show[orb[0.1, {0.2, 0.1}, 1000, Purple], orb[0.1, {0.2, 1}, 1000, Black],
  orb[0.1, {0.2, 1.5}, 1000, Orange], orb[0.1, {Pi, 0.0001}, 1000, Red],
  orb[0.1, {Pi, 0.5}, 1000, Yellow], orb[0.1, {Pi, -0.5}, 1000, Cyan],
  orb[0.1, {Pi, 0.7}, 1000, Brown], orb[0.1, {Pi, -0.7}, 1000, Magenta],
  orb[0.1, {Pi, 1}, 1000, Blue], orb[0.1, {Pi, -1}, 1000, Green]]
```
muestra · púrpura · negro · naranja · número pi · rojo · número pi · amarillo · número pi · cian · número pi · marrón · número pi · magenta · número pi · azul · número pi · verde

Out[∘]=



5. Para los 3 valores de ϵ considerados en el ejercicio 4 encuentre una aproximación del punto fijo hiperbólico cerca de (π,0). Ayuda: para ϵ=0.05,0.1 grafique primero ‖mP[ϵ][{x0, 0}] – {x0, 0}‖ como función de x0 cerca de x0=π (use x0 como variable para que Mathematica no se

Sabemos que $\varphi^{2\pi}(z)$ es simpléctica y viene de integrar $\dot{z} = J\nabla H(z,t)$.
Para conservar la propiedad de simplecticidad ha que usar un método numérico simpléctico.

Si queremos conocer $f(z) = \varphi^{2\pi}(z)$ debemos conocer $\varphi^{t}(z)$. Cuando ε_1 es distinta de cero no hay una expresión explícita del flujo.

<u>Mapeo estándar</u>

Es una forma de aproximar el flujo del Hamiltoniano sobre la sección de Poincaré.

$$\dot{q} = p$$
$$\dot{p} = \varepsilon_2 \sin(2\pi q) + \varepsilon_1 \sin(2\pi t)$$

q y t son varables 1 periódicas.

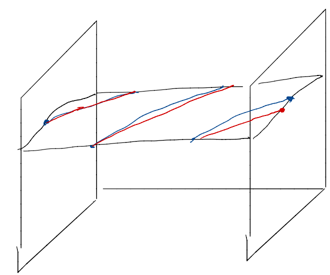
Tomamos un método de Euler simpléctico.

$$q_{n+1} = q_n + h\,\tilde{p}_{n+1}$$
$$\tilde{p}_{n+1} = \tilde{p}_n + h\left[\varepsilon_2 \sin(2\pi q_n) + \varepsilon_1 \sin(2\pi t_n)\right]$$
$$t_{n+1} = t_n + h$$

Para volver a la sección de Poincaré tomamos $h = 1$

$$q_{n+1} = q_n + 1\,\tilde{p}_{n+1}$$
$$\tilde{p}_{n+1} = \tilde{p}_n + 1\left[\varepsilon_2 \sin(2\pi q_n) + \varepsilon_1 \sin(2\pi t_n)\right]$$
$$t_{n+1} = t_n + 1$$
$$t_0 = 0, \Rightarrow t_n = n$$

$$\left.\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} &= p_n + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi q_n) \end{aligned}\right\} \text{Mapeo estándar.}$$



Esta es una "aproximación" simpléctica.

- La aproximación no es muy buena.

$$T\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q + p + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi q) \\ p + \frac{\varepsilon}{2\pi}\sin(2\pi q) \end{pmatrix}$$

$$DT^{T}\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} J\, DT\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = J$$

$$\det\left(DT\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}\right) = 1$$