Estuvimo viendo el comportamiento de iteraciones de transformacions simplécticas.

si f simplectica, $f\circ f$, $f\circ f\circ f$, ... $f\circ\dots\circ f$ son simplécticas?

Teorema 1

(i) Si A es matriz simpléctica $\Rightarrow A^{-1}$ existe y es simpléctica.

(ii) A, B matrices simplécticas $\Rightarrow AB$ es simpléctica.

Dem

(i)

A simpléctica $\Rightarrow$ $A^T \underbrace{J A} = J$

sabemos que $A^{-1} \Rightarrow A^T J = J A^{-1}$

$(A^{-1})^T J A^{-1} = (A^{-1})^T A^T J = (A^T)^{-1} A^T J$

$= J \Rightarrow A^{-1}$ es simpléctica.

(ii) $A^T J A = J$, $B^T J B = J$

$(AB)^T J (AB) = B^T A^T J A B = B^T J B = J$

AB es simpléctica. //

Cor

Sea $S_p(n) = \{$ matrices simplécticas de $2n\times 2n \}$ es un grupo.

Dem Notar que $I_{d_{2n}}^T J I_{d_{2n}} = J$, (i)+(ii) Teo 1 //

Teorema 2

(i) Sea $f: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplectomorfismo, entonces f^{-1} es simplectomorfismo

(ii) Sean $f, g: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplectomorfismos, entonces $f\circ g$ es simplectomorfismo.

Dem

Usando el teorema 1

(i) Sea $A = Df(Z) \Rightarrow A$ es simpléctica.

f es difeomorfismo, existe f^{-1} y

$Df^{-1}(\tilde{Z})$ $(\tilde{Z} = f(Z))$ es A^{-1}

f^{-1} es simplectomorfismo.

(ii) f y g simplectomorfismos

$D_Z f(g(Z)) = [D_g f(g(Z))][D_Z g(Z)]$

es simpléctica ya que lo son. //

Invarianza de la estructura Hamiltoniana bajo transformaciones simplécticas.

Sea $\dot{z} = J \nabla H(z,t)$ sist Ham en $\mathbb{R}^{2n}$

$z = y(z)$ un cambio de variables simpléctico.

$\dot{y} = J \nabla \tilde{H}(y,t)$ con $\tilde{H}(y,t) = H(z(y),t)$

Proposición

Sea $\dot{z} = J \nabla_z H(z,t)$ en $\mathbb{R}^{2n}$, $z = y(z)$

con $y : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplectomorfismo.

Entonces $\dot{y} = J \nabla_y \tilde{H}(y,t)$ con $\tilde{H}(y,t) = H(z(y),t)$

Dem

$$\dot{z}_i = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \dot{y}_j \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = [D_y z]\dot{y}, \quad z = z(y)$$

También $\nabla_z H$:

$$\frac{\partial}{\partial z_i} H = \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial z_i}$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial y_j}{\partial z_i} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial y_i}$$

Hemos usado que $H(z,t) = H(z(y(z)),t)$
$= \tilde{H}(y(z),t)$

$$\nabla_z H(z) = [D_z y]^T \nabla_y \tilde{H}(y,t)$$

Es decir $\dot{z} = J \nabla_z H(z,t) \iff$

$$\iff [D_y z]\dot{y} = J [D_z y]^T \nabla_y \tilde{H}(y,t)$$

(Como $y(z(y)) = y$
$[D_z y][D_y z] = Id_{2n}$)

$$\iff \dot{y} = [D_z y]^{-1} J [D_z y]^T \nabla_y \tilde{H}(y,t)$$

¿$\left([D_z y]^{-1}\right)^T$ es simpléctica?

Dado que A^T es simpléctica cuando A lo es entonces $[D_z y]^{-1} J [D_z y]^T = J$

$$\dot{y} = J \nabla_y \tilde{H}(y,t)$$

//

$$A^T J A = J \Rightarrow J A^T J A = -Id_{2n}$$
$$\Rightarrow J A^T = A^{-1} J$$
$$A J A^T = A A^{-1} J = J \quad //$$

A^T es simpléctica.

Esto es útil para entender las ecuaciones de movimiento cerca de una solución especial.

$$\dot{z} = J \nabla H(z), \quad H = \frac{1}{2} z^T A z + \varepsilon H_1(z)$$

$$\dot{z} = J A z + \underbrace{\varepsilon J \nabla H(z)}_{\text{perturbación Hamiltoniana}}$$

Problema: Buscar $z = T(y)$, T simpléctica para que
$$(H \circ T)(y) = \frac{1}{2} y^T A y + \varepsilon \bar{H}_1(y)$$
$\bar{H}$ sea lo más sencillo posible.

Invarianza del corchete de Poisson.

Proposición

Sea T simplectomorfismo en $\mathbb{R}^{2n}$, $z = T(y)$ ($T \in C^\infty$). Entonces $[f, g](z) = [f \circ T, g \circ T](y)$ $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

Dem

Notación: $z = z(y)$, $f \circ T = \tilde{f}$

$$[f, g](z) = [D_z f]^T J [D_z g] \qquad (1)$$

Si $f(z) = f(z(y(z))) = \tilde{f}(y(z))$

$$\partial_{z_i} f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial z_i} \rightarrow$$

$$D_z f = [D_z y]^T D_y \tilde{f}$$

$$(1) = \left([D_z y]^T [D_y \tilde{f}]\right)^T J \left([D_z y]^T [D_y \tilde{g}]\right)$$

$$= [D_y \tilde{f}]^T \underbrace{\cancel{[D_z y] J [D_z y]^T}}_{J} [D_y \tilde{g}]$$

$$= [D_y \tilde{f}]^T J [D_y \tilde{g}] = [f \circ T, g \circ T](y) \quad //$$