Notar que $\frac{1}{2}(B^T+B)$ es una matriz simétrica.
(se llama la simetrización de $B$)

Si $B$ fuera simétrica entonces $\frac{1}{2}(B^T+B)=B$

$$\dot{z} = J\frac{(B^T+B)}{2}z \qquad \text{sea} \quad A=\frac{B^T+B}{2}$$

$$\dot{z} = JAz \qquad (A \text{ es simétrica})$$

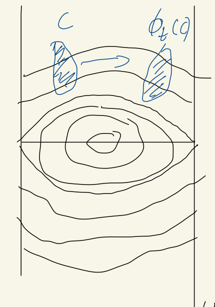
El flujo de este sistema lineal es

$$\phi_t(z) = e^{tJA}z$$

Como el sistema es Hamiltoniano, entonces $e^{tJA}z$ es un simplectomorfismo. //

**Ejemplo 2** Pendulo forzado.

$$\dot{x} = y \qquad H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \cos(x)$$
$$\dot{y} = \sin(x)$$




Espacio fase

$S^1 \times \mathbb{R}$

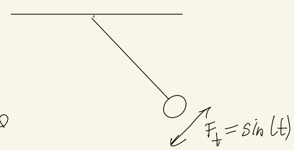
Sabemos que el flujo del péndulo es una transformación simpléctica

Escribimos el Hamiltoniano

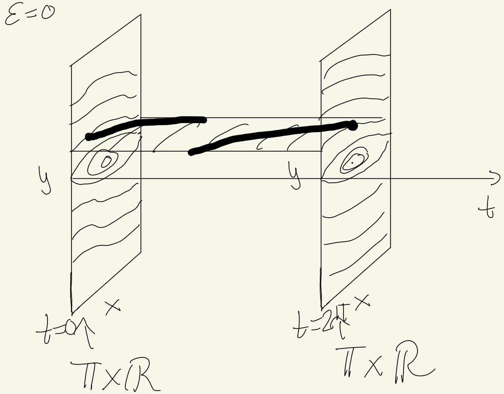
$$H(x,y,t) = \frac{y^2}{2} - \cos(x) + \varepsilon\sin(t)$$

└ perturbación periódica en el tiempo.

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = \sin(x) + \varepsilon\sin(t)$$




El flujo del péndulo perturbado es un simplectomorfismo de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$

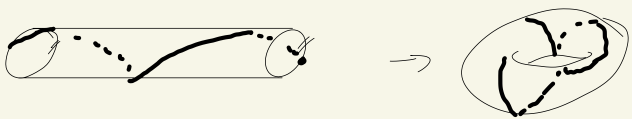


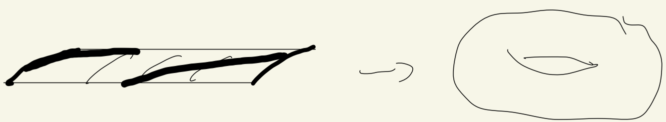

Copias del espacio fase del péndulo para cada $t$.

$t \sim$ el flujo es periódico en el tiempo

$\longrightarrow \mathbb{R}$

podemos identificar $t=0$ con $t=2\pi$





El mapeo $\phi_{2\pi}(x,y)$ es el mapeo al tiempo $T=2\pi$.

- Mapeo estroboscópico.
- Mapeo de Poincaré.

Para $\varepsilon = 0$ el Hamiltoniano se preserva. Podemos escribir todas las curvas que contienen a las soluciones de la ec. de Hamilton.

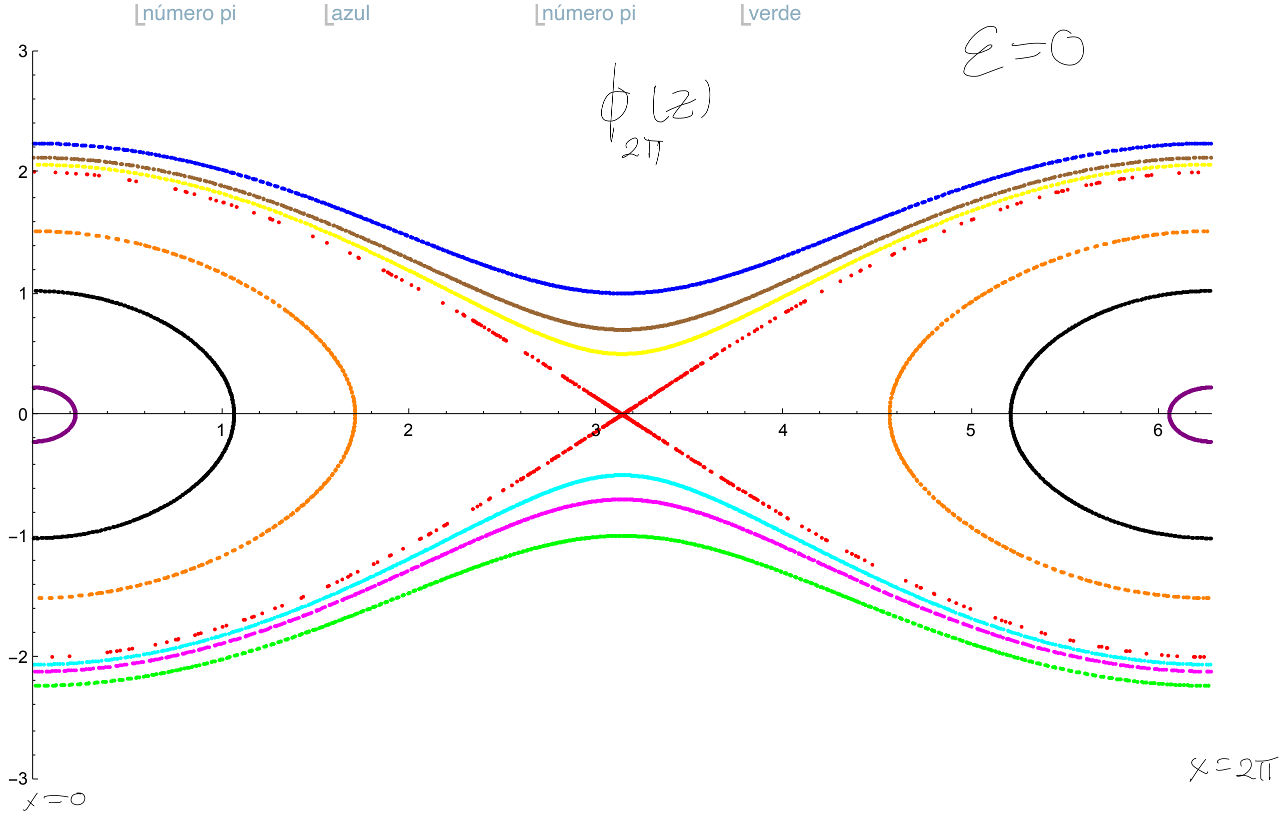
Para $\varepsilon \neq 0$ $\dfrac{\partial H}{\partial t} \neq 0$ y el Hamiltoniano no se preserva.

# 4. Hacer el digrama de fases (graficar algunas órbitas con colores distintos) del mapeo de Poincaré para $\epsilon$=0,0.05,0.1.

## $\epsilon$=0

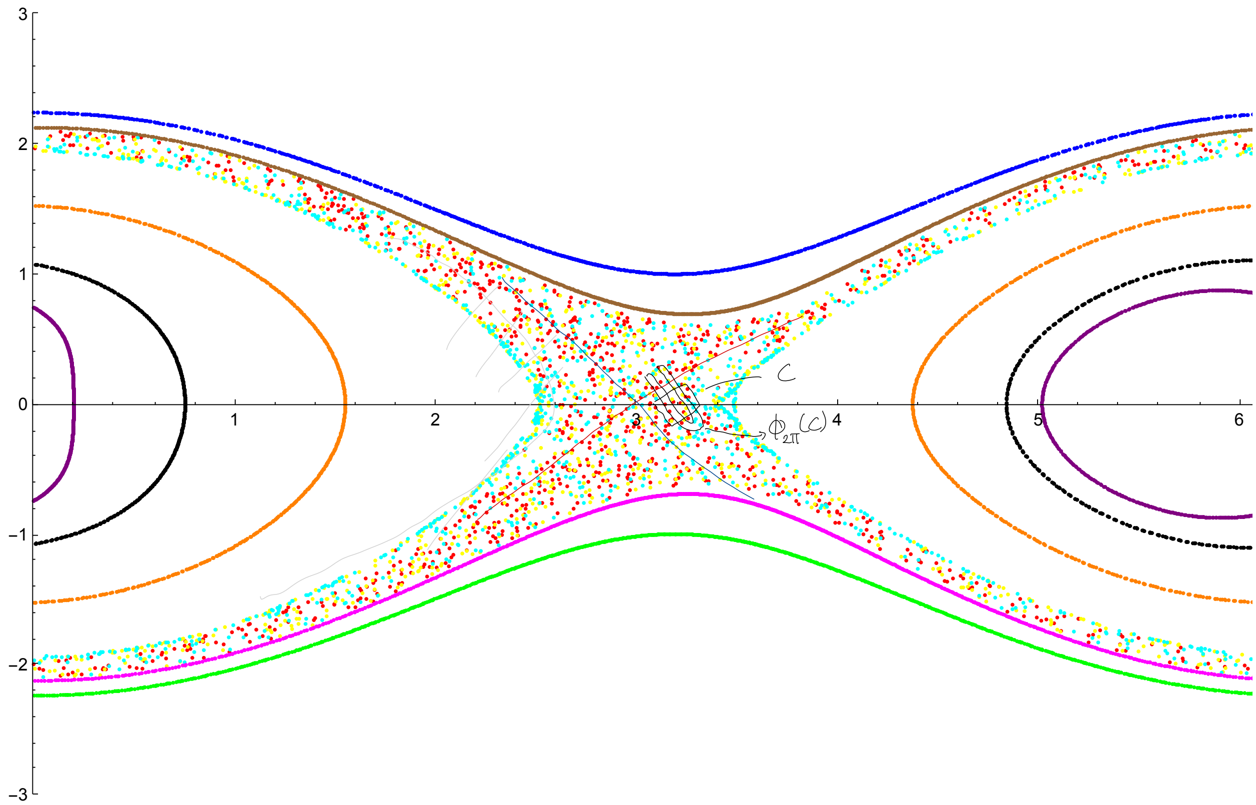
In[18]:=
```
Show[orb[0, {0.2, 0.1}, 1000, Purple], orb[0, {0.2, 1}, 1000, Black],
muestra                        púrpura                        negro
  orb[0, {0.2, 1.5}, 1000, Orange], orb[0, {Pi, 0.0001}, 1000, Red],
                        naranja          número pi              rojo
  orb[0, {Pi, 0.5}, 1000, Yellow], orb[0, {Pi, -0.5}, 1000, Cyan],
          número pi      amarillo         número pi       cian
  orb[0, {Pi, 0.7}, 1000, Brown], orb[0, {Pi, -0.7}, 1000, Magenta],
          número pi      marrón          número pi        magenta
  orb[0, {Pi, 1}, 1000, Blue], orb[0, {Pi, -1}, 1000, Green]]
          número pi     azul          número pi      verde
```

Out[18]=



## $\epsilon$=0.05

In[19]:=
```
Show[orb[0.05, {0.2, 0.1}, 1000, Purple], orb[0.05, {0.2, 1}, 1000, Black],
  orb[0.05, {0.2, 1.5}, 1000, Orange], orb[0.05, {Pi, 0.0001}, 1000, Red],
  orb[0.05, {Pi, 0.5}, 1000, Yellow], orb[0.05, {Pi, -0.5}, 1000, Cyan],
  orb[0.05, {Pi, 0.7}, 1000, Brown], orb[0.05, {Pi, -0.7}, 1000, Magenta],
  orb[0.05, {Pi, 1}, 1000, Blue], orb[0.05, {Pi, -1}, 1000, Green]]
```
muestra púrpura negro naranja número pi rojo número pi amarillo número pi cian número pi marrón número pi magenta número pi azul número pi verde

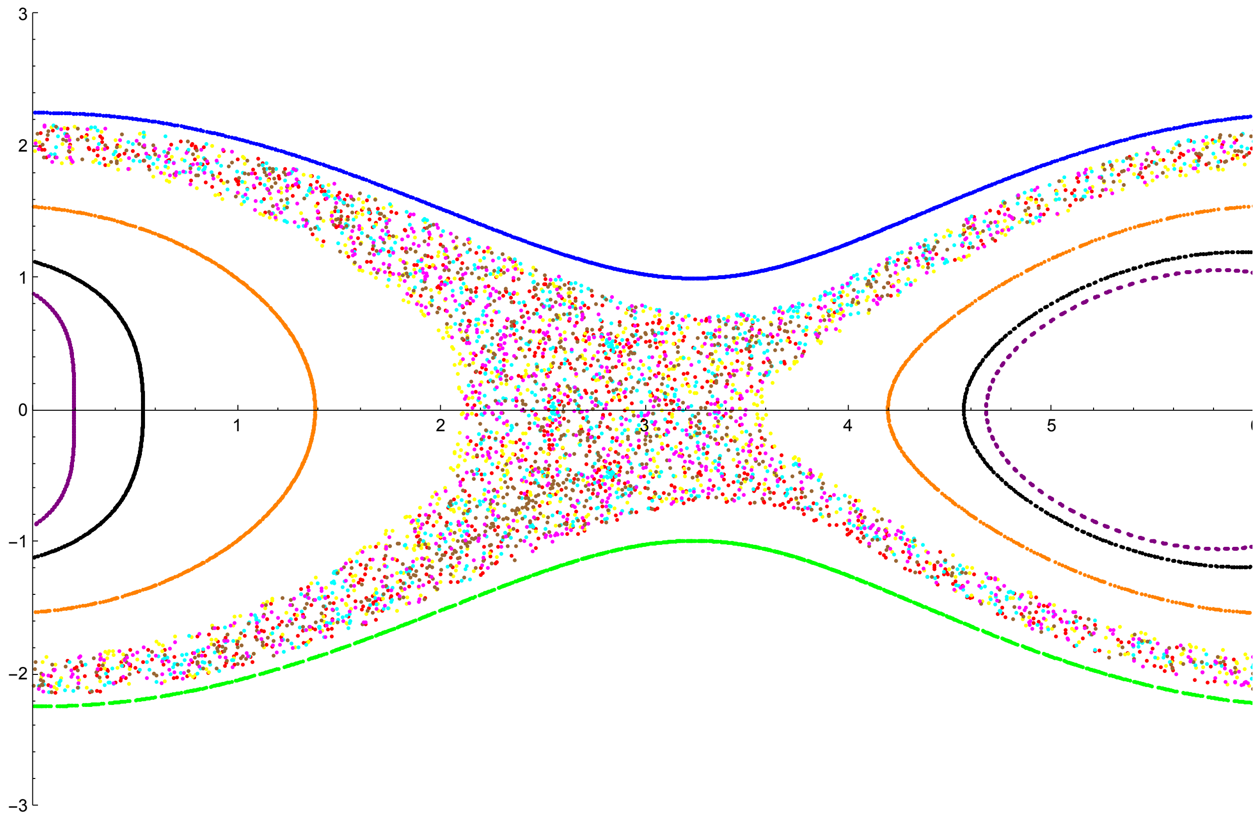
Out[19]=



"

$\epsilon$=0.1

```
In[∘]:= Show[orb[0.1, {0.2, 0.1}, 1000, Purple], orb[0.1, {0.2, 1}, 1000, Black],
        muestra                         púrpura                         negro
  orb[0.1, {0.2, 1.5}, 1000, Orange], orb[0.1, {Pi, 0.0001}, 1000, Red],
                          naranja              número pi            rojo
  orb[0.1, {Pi, 0.5}, 1000, Yellow], orb[0.1, {Pi, -0.5}, 1000, Cyan],
            número pi        amarillo          número pi        cian
  orb[0.1, {Pi, 0.7}, 1000, Brown], orb[0.1, {Pi, -0.7}, 1000, Magenta],
            número pi        marrón           número pi        magenta
  orb[0.1, {Pi, 1}, 1000, Blue], orb[0.1, {Pi, -1}, 1000, Green]]
            número pi      azul           número pi      verde
```

Out[∘]=




5. Para los 3 valores de $\epsilon$ considerados en el ejercicio 4 encuentre una aproximación del punto fijo hiperbólico cerca de ($\pi$,0). Ayuda: para $\epsilon$=0.05,0.1 grafique primero ‖mP[$\epsilon$][{x0, 0}] – {x0, 0}‖ como función de x0 cerca de x0=$\pi$ (use x0 como variable para que Mathematica no se